Б. И. АРГУНОВ, М. Б. БАЛК

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УТВЕРЖДЕНО МИНИСТЕРСТВОМ
ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ
ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

Издательство «Просвещение» Москва 1966

$\frac{2-2-2}{22-66}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Назначение этой книги — служить учебным пособием по элементарной геометрии для лиц, которым предстоит преподавать эту дисциплину в школе. Этим определяется и содержание книги, и характер изложения материала.

Предполагая, что читатель знаком с предметом в объеме школьного курса, мы нередко ссылаемся на страницах этой книги на школьные учебники.

Расположение материала и стиль его изложения не сходны с изложением в школьных учебниках. Так, например, здесь нет деления курса на планиметрию и стереометрию. Нередко оказывается, что вопросы, которые в школьном курсе геометрии изучаются в различных классах, рассматриваются в одном параграфе. Мы полагаем, что для лучшего осмысливания элементарной геометрии представляется особенно полезным сопоставление родственных понятий, идей и методов. В частности, по нашему мнению, целесообразно рассматривать параллельно аналогичные вопросы планиметрии и стереометрии.

Предусмотренный учебным планом пединститутов курс элементарной геометрии весьма близок, с одной стороны, курсу оснований геометрии (который сейчас включен в курс высшей геометрии) и, с другой стороны, курсу методики преподавания математики. Однако курс элементарной геометрии не должен их дублировать. Это соображение сказалось на содержании и на характере изложения данной книги. В частности, мы воздержались от включения в книгу явно сформулированной полной (или избыточной) системы аксиом с последующим систематическим выведением курса из такой системы аксиом. Нам представляется, что такого рода вопросы должны быть сконцентрированы в курсе высшей геометрии.

Учитывая крайнюю ограниченность объема лекционного курса элементарной геометрии в педагогическом институте и считаясь с необходимостью затронуть много вопросов принципиального характера и некоторых интересных для учителя математики фактов, мы нередко опускаем доказательства отдельных теорем, ограничиваясь разъяснением их содержания.

Весь материал изложен в пяти главах.

Глава I содержит обзор важнейших понятий элементарной геометрии. Со многими из этих понятий наш читатель впервые встретился еще в первые месяцы изучения геометрии в школе. Но понятно, что такое знакомство с ними не могло быть достаточно содержательным.

Во II главе выясняется сходство понятий «многоугольник», «многогранный угол», «многогранник». Даются определения этих понятий. Рассматриваются правильные, полуправильные и другие виды многоугольников и многогранников. Глава заканчивается общими соображениями относительно вычерчивания изображений многогранников и их сечений.

Глава III посвящена геометрическим величинам. В отличие от большинства учебных пособий по элементарной геометрии мы отдаем предпочтение не аксиоматическому, а конструктивному построению теории геометрических величин — в духе идей, намеченных А. Лебегом в его известной книге «Об измерении величин».

Приведены некоторые сведения из истории и практики измерения геометрических величин. Рассмотрены примеры применения барицентрических и векторных методов. Дан краткий обзор изопериметрических задач.

В IV главе речь пойдет о геометрических преобразованиях (на плоскостн и в пространстве). Использование понятия репера позволяет здесь включить различные виды движения в единую схему. Гомотетия и инверсия определяются сразу и для плоскости, н для трехмерного пространства. Выясияется связь между инверсией и однны из наиболее важных способов построения географических карт — стереографической проекцией.

Предмет главы V — геометрические построения (на плоскости, в пространстве, на некоторых поверхностях). Глава начинается с аксноматики конструктивной геометрии, необходимой в дальнейшем для выяснения конструктивных возможностей отдельных инструментов. Выделяются и иллюстрируются примерами три основных метода геометрическнх построений: метод пересечения фнгур (метод геометрических мест), метод геометрических преобразованнй, алгебраический метод. Устанавливается критерий разрешимости задач на построенне циркулем н лннейкой. Рассматриваются теоремы Мора — Маскеронн (о конструктивных возможностях циркуля) и Штейнера (о построениях с линейкой при налнчии начерченной окружности). Устанавливается неразрешимость циркулем и линейкой некоторых классических задач. Рассмотрены построения с другими средствами (например, с циркулем и линейкой ограниченных размеров), построения с недоступными точками, построения в пространстве и примеры построений на поверхностях, отлнчных от плоскости.

Приведено около 300 задач для практических занятий по данному курсу. При подборе задач мы учитывали общее количество часов, отводимых иа этот курс учебным планом, средний уровень подготовки студентов педвузов, возможиость использования изученных задач будущими учителями в практике их работы.

Этот учебник написан на осиовании многолетнего опыта преподавания авторами элементарной геометрии в Смолеиском педагогическом нниституте.

При подготовке рукописи мы частично использовали нашу книгу «Геометрические построения на плоскости» (Учпедгиз, 1957).

При написании некоторых параграфов (в особениостн § 56) мы воспользовались ценными советами М. Я. Выгодского. В § 28—33 нами были использованы отдельные материалы из иеопубликованной статьи В. Л. Рабиновича, любезно предоставленной им в наше распоряжение. Нам помогли также критические замечания, сделанные З. А. Скопецом, В. А. Жаровым, Л. С. Атанасяном, И. М. Ягломом.

Выражаем свою искрениюю признательность этим товарищам.

ВВЕДЕНИЕ

Элементарная геометрия — одна из древнейших наук. Она возникла из насущных практических потребностей человечества в измерении земельных участков, в определении вместимости сосудов, в определении высот или расстояний по косвенным данным и в решении многих других задач подобного рода, с которыми сталкивался человек в процессе труда, в ходе торговых отношений, при расчете строительных и других технических сооружений.

Процесс накопления человечеством геометрических сведений был очень длительным и осуществлялся в разнообразных формах. Первоначально единственным источником этих сведений был опыт, наблюдение над свойствами линий, поверхностей и тел, которые человек наблюдал в природе и в своей трудовой деятельности. Получение геометрических сведений чисто опытным путем потребовало очень большого времени. Вместе с накоплением таких сведений все более назревала необходимость систематизации материала, подкрепления наблюдений логикой.

Древнейшие из дошедших до нас исторических документов восточных культур — папирус Ахмеса («Наставление, как достигать всех темных вещей, всех тайн, содержащихся в предметах») и Московский папирус, относящиеся к 2000—1700 гг. до н. э., — содержат изложение важных геометрических результатов, вплоть до формулы объема усеченной пирамиды (с квадратным основанием).

В течение VII—III вв. до н. э. геометрия интенсивно развивалась в Малой Азии, Италии и Греции, где накопленные к этому времени сведения систематизировались и постепенно приобретали характер глубоко продуманной и широко развитой науки. Математические школы Фалеса Милетского, Евдокса Книдского, Менехма, Пифагора и философские школы Платона, Аристотеля и

Демокрита подготовили почву для того, чтобы геометрия приняла ту форму и приобрела то содержание, которые она имеет и в наше время.

Исследования древних ученых нашли блестящее завершение в сочинении Евклида Александрийского, написанном около 300 г. до н. э. под названием «Начала».

Евклидовы «Начала» оказали исключительное влияние на развитие геометрии как науки в течение многих последующих столетий. Существенным дополнением к «Началам» стала теория измерения величин, основы которой были заложены другим великим мыслителем древности — Архимедом (287—212 гг. до н. э.).

Со времени Евклида и Архимеда прошло более двух тысячелетий. За это время в классической элементарной геометрии накопилось много новых интересных фактов. Исключительную роль в истории элементарной геометрии сыграло открытие неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским.

Школьный курс геометрии почти во всех странах до последних десятилетий в большей или меньшей степени копировал содержание и стиль евклидовых «Начал». Сейчас преподавание геометрии в школе все более отходит от этих традиций, существенные изменения вносятся и в программу, и в характер изложения этого предмета.

Вопрос о месте и содержании курса элементарной математики в педагогических институтах вызывал и вызывает много различных толкований. Но в настоящее время нет, по-видимому, сомнений в необходимости такого курса в системе подготовки учителя.

Выясним, каковы основные задачи преподавания элементарной геометрии в педагогическом институте.

В период обучения в школе учащийся усваивает курс математики на разных этапах своего умственного развития. Подготовка учителя должна предусматривать соответствующее в ы р а в н и в а н и е различных уровней строгости и полноты, на которых изучается геометрия в различных классах школы. Студент педагогического института должен взглянуть на свой геометрический багаж иными глазами — глазами будущего преподавателя этой дисциплины в школе.

Повторение и критическое осмысливание изученного в школе геометрического материала составляет первую основную задачу преподавания геометрии в педагогическом институте.

Повторение школьного курса геометрии в институте должно осуществляться параллельно с изучением нового материала и главным образом в форме систематических самостоятельных занятий студентов по школьным учебникам геометрии. Каждому студенту удобнее всего пользоваться для повторения тем учебником, по которому он обучался в школе. Но одновременно необходимо знакомиться и с теми учебниками, которые появились за годы, прошедшие после окончания студентом школы.

Второй задачей преподавания элементарной геометрии в педагогическом институте является изучение полезных предложений этой науки, еще не получающих освещения в школьном курсе математики.

К сведениям такого рода относятся, например, теорема Стюарта о трансверсали треугольника, теоремы Птолемея о вписанном четырехугольнике, «парадокс» Шварца о поверхности цилиндра, описание полуправильных многоугольников и многогранников, теорема Бояи — Гервина и многие другие предложения, доступные для изложения элементарными методами. Такие сведения будут способствовать обобщению и углублению знаний, полученных студентом в школе, и окажутся очень полезными учителю в практике внеклассной работы по математике с учащимися.

Преподавание школьного курса геометрии имеет целью систематическое ознакомление учащихся со свойствами фигур, применение этих свойств к решению задач, развитие у учащихся пространственных представлений и умения применять полученные знания к выполнению практических работ.

Третья задача преподавания элементарной геометрии в педагогическом институте состоит в том, чтобы развить у студентов навыки решения задач по геометрии, приобретенные ими в школе. В ходе практических занятий решаются задачи различного характера: на вычисление, на доказательство, на построение. Решение задач развивает геометрическую интуицию и пространственные представления студента, обогащает его сведениями относительно практических приложений геометрии, вооружает его полезными навыками.

В задачи школьного обучения и воспитания входит развитие у учащихся навыков логического мышления. Учитель математики должен повседневно добиваться воспитания логической культуры своих учеников, повышать требовательность к логической строгости преподавания геометрии от класса к классу. Для этого сам учитель должен быть подготовлен и к тому, чтобы заметить нелогичность в рассуждении ученика, и к тому, чтобы исправить ее надлежащим образом, и к тому, чтобы критически отнестись к печатному тексту учебной или методической литературы.

Воспитание логической культуры, потребности в логической доброкачественности формулировок и рассуждений, критического отношения к прочитанному или услышанному из области геометрии (т. е. преодоление привычки к бесспорному восприятию таких сведений) — *четвертая основная задача преподавания элементарной геометрии в педагогическом институте.*

ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

§ 1. ВИДЫ ПОНЯТИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. В элементарной геометрии встречаются понятия, содержание и смысл которых раскрываются в других науках, например в философии, логике, в других математических дисциплинах. Таковы понятия: «существует», «совокупность» («множество», «класс»), «принадлежит к совокупности», «понятие», «определение», «умозаключение», «доказательство», «число», «уравнение» и т. п. В рамках геометрии эти понятия не определяются. Их смысл и содержание считаются известными.

Наряду с этим курс элементарной геометрии содержит также *определения* большого числа различных понятий (например, определения ромба, пирамиды, скрещивающихся прямых, диаметра шара и др.).

Так как каждое определение вводит новое понятие через ранее рассмотренные понятия, то ясно, что определить все без исключения понятия невозможно. Поэтому при любом построении курса элементарной геометрии приходится явно или неявно выделить несколько геометрических понятий, которые вводятся в курс без определения.

Так, например, нигде в школьном учебнике геометрии мы не найдем определения терминов: «точка *лежит на* прямой (или на плоскости)», «точка *лежит между* двумя другими точками», нигде не сказано, что значит «*построить* геометрическую фигуру».

Геометрические понятия, которые принимаются при том или ином конкретном построении курса элементарной геометрии без определения, называют *первичными, основными* или *неопределяемыми* в данной системе изложения. При тщательном построении курса элементарной геометрии необходимо четко выделить те понятия, которые будут даны без определения.

Не давая определения первичных понятий, мы в то же время всегда подразумеваем, что эти понятия обладают какими-то известными нам свойствами, что между этими понятиями существуют некоторые «само собой разумеющиеся» связи и зависимости.

Предложение, устанавливающее связь между первичными понятиями элементарной геометрии и принимаемое без доказательства, называется аксиомой элементарной геометрии.

Некоторые из аксиом явно сформулированы в школьном учебнике геометрии, например: «Существует прямая, проходящая через две данные точки». При строгом построении курса элементарной геометрии необходимо иметь список всех его аксиом.

В данном курсе мы не будем приводить полного списка аксиом. Вопрос об аксиоматике элементарной геометрии подробно рассматривается в курсе «Основания геометрии». Отдельные аксиомы будут формулироваться в дальнейшем по мере того, как они потребуются по ходу изложения.

После того как первичные (неопределяемые) понятия выделены, следует уже все другие геометрические понятия определять. *Определение*, как и аксиома, тоже предложение, принимаемое без доказательства; определение тоже устанавливает связь между понятиями. Но определение вводит новое понятие, между тем как аксиома говорит о связи только между такими понятиями, которые уже ранее имелись. Определяемые понятия составляют, естественно, подавляющее большинство в списке понятий элементарной геометрии.

Очевидно, нет смысла давать определения таких понятий, существование которых противоречит аксиомам или ранее введенным определениям. Например, в элементарной геометрии не имеет смысла вводить такое определение: «Смежными прямыми называются две различные прямые, имеющие две общие точки», ибо таких прямых не существует. При введении каждого нового понятия необходимо тем или иным способом убедиться в его существовании. Именно так и поступают, например, при введении понятий параллельных прямых, параллельных плоскостей, правильного икосаэдра и др. В условиях элементарной геометрии доказательство существования определяемого объекта сводится обычно к указанию способа его построения.

При формулировке определений необходимо проявить осторожность, чтобы не определять неизвестное понятие через такие понятия, которые ранее не были определены и которые не содержатся среди первичных понятий элементарной геометрии. Например, определение «прямым углом называется угол, стороны которого взаимно перпендикулярны» допустимо лишь в том случае, если до этого введены (без помощи понятия прямого угла) следующие понятия: «угол», «стороны угла», «перпендикулярные прямые».

Сама совокупность аксиом составляет, по существу, косвенное, неявное определение первичных понятий: все, что необходимо знать о первичных понятиях для построения курса элементарной геометрии, должно быть сказано в аксиомах.

При различных способах построения курса геометрии в качестве первичных могут быть приняты различные понятия:

понятия, которые являются первичными при одном способе построения курса геометрии, могут оказаться определяемыми при других способах построения этого курса.

В зависимости от выбора первичных понятий меняется и список аксиом. Так, например, возможно построить весь курс геометрии на основании таких понятий: «точка», «прямая», «плоскость», «принадлежит» («лежит на», «проходит через»), «лежит между», «движение», «построить фигуру». Такой подход близок к принятому в средней школе способу построения курса геометрии. Но известны и другие варианты выбора основных понятий. Например, можно внести в список первичных понятий понятие «равенство» (отрезков, углов) вместо понятия «движения», понятие «следовать за» вместо понятия «лежать между» и т. п. В качестве еще одного примера упомянем об аксиоматике Г. Вейля, где основными понятиями геометрии служат «точка» и «вектор».

2. Остановимся еще особо на нескольких понятиях, которые со времен Евклида встречаются в первых разделах руководств по элементарной геометрии: «тело», «поверхность», «линия», «граница», «ограниченный» и некоторые другие. В школьном преподавании смысл этих понятий либо разъясняется на примерах, либо вводится с помощью предложений такого рода: «Тело — это часть пространства, ограниченная со всех сторон», «Граница тела есть поверхность», «Граница поверхности есть линия», «Линия есть след движущейся точки» и т. п. Эти предложения следует рассматривать не как определения названных понятий, а лишь как описания, так как содержание новых понятий раскрывается здесь через понятия, которые ранее не были определены. Описанием является также первое предложение «Начал» Евклида: «Точка есть то, что не имеет частей» (или: «Точка есть то, часть чего есть ничто»).

С помощью упомянутых понятий иногда пытаются ввести понятие прямой, плоскости и т. п. Например, в «Началах» Евклида приводится такое определение: «Прямая линия есть такая, которая одинаково расположена относительно своих точек». В одном из «Диалогов» Платона (древнегреческий философ, IV в. до н. э.) встречается определение: «Прямая линия есть линия, у которой середина перекрывает концы». В некоторых учебниках дается следующее определение плоскости: «Плоскость есть такая поверхность, которая целиком содержит принадлежащую ей прямую».

Указанные определения в логическом отношении неполноценны хотя бы по следующей причине. Данные выше описания линии, поверхности недостаточны, чтобы полностью раскрыть содержание этих понятий (в частности, потому, что содержание понятия «граница» предварительно совсем не раскрыто). Из этих описаний и из даваемых на их основании определений прямой и плоскости, вроде приведенных выше, не вытекают все те свойства этих понятий, которыми мы обычно пользуемся.

Проведенный в течение последних ста лет анализ показал всю сложность понятий «линия», «поверхность», «тело».

Ниже (§ 5) мы покажем, каким образом возможно определить понятия «тело», «линия» и другие, опираясь на понятия «точка» «шар», «отрезок» и др.

Тщательное изучение этих понятий удалось провести только в течение последнего столетия. Наиболее полное определение понятие «линия» получило сравнительно недавно в трудах известного советского ученого П. С. Урысона (1898—1924).

Общими понятиями произвольной линии, произвольного тела, произвольной поверхности в преподавании элементарной геометрии пользуются редко.

3. Помимо определений и аксиом, в элементарной геометрии формулируются и другие предложения относительно геометрических понятий.

Каждое утверждение относительно геометрических понятий, справедливость которого устанавливается посредством некоторого рассуждения, называется в геометрии теоремой. Рассуждение, с помощью которого убеждаются в справедливости теоремы, называется *доказательством.* Сущность его заключается в том, что теорема выводится из аксиом, определений и ранее доказанных теорем, т. е. представляется как их логическое следствие. Геометрические теоремы часто формулируются в так называемой *силлогистической форме*, т. е. в таком виде, в котором явно выделено *условие* (то, что дано) и *заключение* (то, что требуется доказать). Например: «Если две различные плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны».

Общая схема теоремы, сформулированной в силлогистической форме, имеет следующий вид:

«Если A, то B» или: «из A следует B».

Обычно не составляет труда теорему, не записанную в силлогистическом виде, перефразировать так, чтобы она приняла силлогистическую форму. Например, теорему: «В равных треугольниках против равных сторон лежат соответственно равные углы» — возможно перефразировать так: «Если два треугольника равны, то в них против равных сторон лежат соответственно равные углы». Или: «Из равенства двух треугольников следует равенство углов, лежащих в них против соответственно равных сторон».

Если теорема записана в силлогистической форме:

«Если A, то B»,

то возможно, пользуясь ею, образовать три других утверждения:

а) теорему, *обратную* данной, т. е. утверждение, которое имеет следующую силлогистическую схему:

«Если B, то A»

(условием служит заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы);

б) теорему, *противоположную* данной, т. е. утверждение, которое имеет схему:

«Если не A, то не B»

(условием служит отрицание условия данной теоремы, а заключением — отрицание заключения данной теоремы);

в) теорему, *обратную противоположной* к данной теореме, т. е. такое утверждение, которое имеет схему:

«Если не B, то не A»

(условием служит отрицание заключения данной теоремы, а заключением — отрицание условия данной теоремы).

Обратим внимание на то, что из справедливости данной теоремы не всегда следует справедливость противоположной или обратной теоремы. Но теорема, обратная данной, справедлива тогда и только тогда, когда справедлива теорема, противоположная данной.

Действительно, пусть справедлива теорема:

«Если B, то A».

Докажем теорему:

«Если не A, то не B».

По условию последней теоремы A не имеет места. Если бы имело место B, то по теореме: «Если B, то A» — имело бы место A. Значит, допущение ложно, имеет место «не B». Аналогично можно показать, что из теоремы, противоположной данной, следует теорема, обратная даниой.

Что касается теоремы, противоположной обратной теореме, то она справедлива одновременно с данной теоремой. Доказательство аналогично предыдущему.

§ 2. ПОНЯТИЕ ФИГУРЫ

1. С простейшими геометрическими фигурами читатель знакомился еще по первым страницам школьного учебника геометрии. Изложение рассчитано там на детей 12—13 лет, только приступающих к изучению геометрии. Естественно поэтому при изучении повторительного курса элементарной геометрии прежде всего глубже осмыслить эти понятия.

Учитель должен быть знаком не только с такими определениями понятий, которые упрощены из педагогических соображений, но и с более полными и строгими определениями тех понятий, которые встречаются в процессе преподавания.

Мы не ставим здесь вопроса о том, каким образом следует дать учащимся представление о названных выше понятиях на первых уроках геометрии в школе, относя эту задачу к курсу методики преподавания математики.

2. *Геометрической* фигурой (или просто фигурой) *называется всякое непустое множество точек.*

Примерами фигур могут служить: одна точка, любое конечное множество точек (см., например, рис. 1). Прямую и плоскость мы тоже будем рассматривать как фигуры, состоящие из всех принадлежащих им точек.

Принадлежность точки P к фигуре Φ записывают так: $P \in \Phi$.

Одна фигура Φ_1 называется *частью* другой фигуры Φ_2, если каждая точка первой фигуры принадлежит второй фигуре. Это записывают так: $\Phi_1 \subset \Phi_2$. Например, частями плоскости будут: каждая лежащая в этой плоскости прямая, любое конечное число точек этой плоскости, сама эта плоскость.

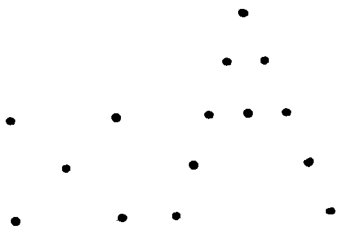


Рис. 1.

В геометрии часто приходится иметь дело с равными фигурами, т. е. такими, которые могут быть совмещены. Здесь мы будем пользоваться теми сведениями о равенстве фигур (в частности, отрезков и углов), которые наш читатель получил в средней школе. К более тщательному рассмотрению отношения равенства мы еще вернемся в главе IV.

3. Геометрия занимается изучением свойств фигур. Помимо элементарной геометрии, студенты педагогических институтов знакомятся с *аффинной* геометрией, с *проективной* геометрией и с *топологией*. Эти ветви различаются тем, что в каждой из них изучается некоторым образом выделенный класс свойств фигур. Представим себе в самых общих чертах, каковы эти классы.

В элементарной геометрии рассматриваются преимущественно так называемые *метрические* понятия и свойства фигур, т. е. такие понятия и свойства, которые могут быть связаны с рассмотрением равенства углов и отношения отрезков (в частности, равенства отрезков). Типичным примером метрических понятий могут служить понятия: «перпендикулярность прямых», «окружность», «куб». Свойство четырехугольника быть квадратом есть метрическое свойство. Теорема Пифагора — метрическая теорема.

В отличие от элементарной геометрии в аффинной геометрии мы имеем дело с такими понятиями и с такими свойствами фигур, которые связаны лишь с *параллельностью* (прямых и плоскостей) и с *отношением трех точек*[1]. Эти понятия и свойства фигур назы-

[1] Отношением (ABC) трех точек одной прямой называется число $AC : BC$, взятое со знаком плюс, если векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ направлены одинаково, и со знаком минус, если они имеют противоположные направления.

ваются *аффинными*. Так, свойство четырехугольника быть параллелограммом есть аффинное свойство, аффинный характер носит теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке.

Проективная геометрия занимается изучением так называемых *проективных понятий и свойств фигур*. Это понятия и свойства, связанные с отношением взаимной принадлежности точек, прямых и плоскостей и с двойным отношением четырех точек одной прямой[1].

Топология же изучает свойства фигур, связанные лишь с «близостью», «непрерывностью», т. е. свойства, сохраняющиеся при деформациях «без разрывов и склеиваний».

В элементарной геометрии мы можем встретиться и с такими свойствами фигур, которые носят аффинный, проективный или даже топологический характер. Например, подсчет числа диагоналей многоугольника есть задача топологического характера, так как здесь нас не интересуют ни размеры углов или сторон многоугольника, ни параллельность каких-либо линий, ни даже то обстоятельство, что стороны многоугольника прямые: такую же задачу и с тем же результатом можно решать не на плоскости, а, например, на сфере. «Высшие» разделы геометрии являются в этом смысле менее универсальными: в проективной геометрии мы не встретим метрических вопросов, а в топологии не решают вопросов проективного или аффинного характера.

Некоторые соображения о предмете геометрии приведены еще в конце главы IV этой книги в связи с изучением геометрических преобразований. Соответствующие идеи развиваются более обстоятельно в курсе высшей геометрии.

4. Отрезок и луч. Напомним сначала определения этих понятий, приводимые в школьных учебниках.

«Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется отрезком этой прямой. Отрезок обыкновенно обозначается двумя буквами, поставленными у его концов» ([20], ч. I, стр. 5; см. также [31], стр. 9; [12], ч. I, стр. 10[2]).

«Лучом называется часть прямой линии, ограниченной с одной стороны» ([31], стр. 9).

«Иногда рассматривают прямую, ограниченную только с одной стороны, например в точке A. О такой прямой говорят, что она исходит из точки A; ее называют лучом (или полупрямой)» ([31], стр. 5).

В чем недостатки таких определений?

Для определения понятия отрезка используется понятие «часть прямой» (иными словами, часть множества тех точек, которые принадлежат прямой); выражение «ограниченная с обеих сторон» предполагает несомненным, что часть прямой может быть ограничена

---

[1] Двойным отношением четырех точек одной прямой ($ABCD$) называется отношение $(ABC):(ABD)$ двух (простых) отношений трех точек этой прямой.

[2] См. список литературы в конце книги.

не более чем с двух сторон. Что же означает «ограничена», «с двух сторон»? Откуда следует, что часть прямой может быть ограничена не более чем с двух сторон? Почему нельзя луч (в привычном понимании) считать «ограниченным с обеих сторон» («сверху» и «снизу»)? Почему нельзя, например, совокупность двух отрезков (в привычном понимании) A_1A_2 и B_1B_2 и точки C, принадлежащих одной и той же прямой (рис. 2), считать «частью прямой, ограниченной с обеих сторон»? Наконец, что же такое «концы отрезка»? Ведь если мы употребляем этот термин и он не относится к первичным понятиям, то его следует до этого определить. Следует ли считать, что концы отрезка принадлежат отрезку? Сходные вопросы могут возникнуть и по отношению к цитированным выше определениям луча.

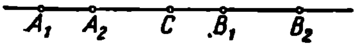


Рис. 2.

Понятия отрезка и луча можно строго определить, если считать известным понятие «лежать между». Смысл понятия «лежать между» раскрывается в аксиомах. Вот некоторые из них. «Если какая-то точка C лежит между двумя другими A и B, то эти три точки — на одной прямой». «Если точка C лежит между точками A и B, то она лежит также между B и A». «Между любыми двумя точками лежит еще бесконечно много точек».

Отрезком (или замкнутым отрезком, или сегментом) *называется фигура, состоящая из двух точек A и B и всех тех точек прямой AB, которые лежат между этими двумя точками.* (Не исключается и тот случай, когда точки A и B совпадают. При этом отрезок называется *нулевым*.) Эту фигуру обозначают символом $[AB]$ или AB. Точки A и B называются *граничными точками* отрезка AB или его концами. Остальные точки отрезка называются *внутренними* его точками.

Иногда рассматривают *открытый отрезок*, или *интервал*. Под этим понимают фигуру, состоящую из всех точек, лежащих между точками A и B.

Отрезок AB называют иногда также *расстоянием* между точками A и B. Если нет надобности в указании концов отрезка, то его иногда обозначают малой буквой: a, b, c и т. д.

Если относительно концов отрезка указано, какой из них следует считать началом, а какой концом отрезка, то такой отрезок называется *направленным отрезком* или *вектором*.

Понятие луча несколько сложнее. Для точек прямой имеет место следующий факт, который мы примем в качестве аксиомы: каждая точка O прямой a разбивает множество всех точек этой прямой на два класса (на две части) в том смысле, что точка O лежит между любыми двумя точками, взятыми из различных классов, и не лежит между какими-либо точками одного и того же класса.

Лучом *прямой a с началом в точке O называется фигура, состоящая из точки O и любого из тех двух точечных классов, на ко-*

торые прямая а разбивается точкой O. О всех точках одного класса говорят, что они лежат *по одну сторону* от точки O.

Чтобы задать луч, достаточно, помимо точки O, указать еще одну какую-либо его точку P. Луч с началом в точке O, содержащий точку P, удобно обозначать символом $\overline{OP}$.

Заметим, что совершенно аналогично тому, как вводится понятие луча (полупрямой), можно ввести понятия *полуплоскости* и *полупространства.*

Понятие отрезка используется для определения понятия выпуклой фигуры. *Фигура называется* **выпуклой**, *если она содержит каждый отрезок, соединяющий любые две ее точки* (рис. 3). Простейшими примерами выпуклых фигур могут служить прямая, плоскость, луч, отрезок, полупространство.

5. Введем еще одно важное понятие, связанное с понятием фигуры. Пусть даны некоторая фигура Ф и некоторая точка P. Рассмотрим всевозможные отрезки, соединяющие точку P с точками фигуры Ф. Если среди этих отрезков существует наименьший, то его называют *расстоянием точки P от фигуры* Ф. Иными словами, если среди точек фигуры Ф имеется такая точка M, что при любом выборе точки N фигуры Ф $PM \leqslant PN$, то отрезок PM и есть расстояние точки P от фигуры Ф.

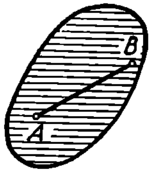


Рис. 3.

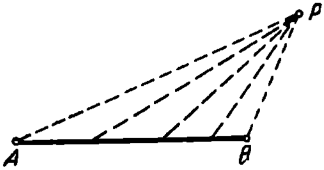


Рис. 4.

Итак, **расстоянием** *точки P от фигуры* Ф *называют кратчайшее из расстояний от точки P до всех точек фигуры* Ф[1]. Эту величину мы будем обозначать через $\varrho(P, \Phi)$.

Может случиться, что среди расстояний от точки P до точек фигуры Ф нет кратчайшего. Так, например, обстоит дело, если Ф — интервал AB, а проекции точки P на прямую AB лежит вне отрезка AB (рис. 4). Можно дать более общее определение расстояния точки от фигуры, которое охватывает и этот случай. Можно показать, что среди отрезков, которые не больше каждого из расстояний от точки P до точек фигуры Ф, всегда имеется наибольший[2] (на рис. 4 это отрезок PB). Этот отрезок и принимается в таких случаях за расстояние точки P от фигуры Ф.

Более общим является понятие *расстояния между двумя фигурами.* Если среди отрезков, соединяющих точки фигуры Φ_1 с точками фигуры Φ_2, имеется наименьший, то этот отрезок принимается

[1] Здесь мы считаем известным, что значит сравнить два отрезка по величине. О точном смысле этой задачи будет сказано еще в главе IV.

[2] Не исключено, что это будет нулевой отрезок.

за расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2 и обозначается через $\rho(\Phi_1, \Phi_2)$. Понятие расстояния между фигурами также можно обобщить аналогично тому, как это было сделано для понятия расстояния точки от фигуры.

6. Весьма распространенным является способ задания фигуры путем указания такого свойства, которым должны обладать все точки этой фигуры и только они. Если фигура задана именно таким образом, то ее иногда называют *геометрическим местом точек*, обладающих этим свойством.

Именно таким образом удобно дать определение понятий «окружность», «круг» и аналогичных им понятий «сфера», «шар».

Окружностью *радиуса r с центром в точке O называется множество всех точек некоторой плоскости, которые находятся на данном расстоянии r от некоторой точки O той же плоскости.* Эта точка называется *центром* окружности, а каждый отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности, называется *радиусом* окружности.

Кру́гом радиуса r с центром в точке O называется множество всех таких точек некоторой плоскости α, для которых расстояние от лежащей в этой плоскости точки O не больше данного отрезка r. Точка O называется *центром круга*. Множество всех таких точек M плоскости α, для которых $OM < r$, будем называть *внутренностью круга*.

Аналогично определяются понятия «сфера», «шар», «внутренность шара»: для этой цели нужно в последних определениях заменить слова «окружность», «круг», «плоскость» соответственно словами «сфера», «шар», «пространство».

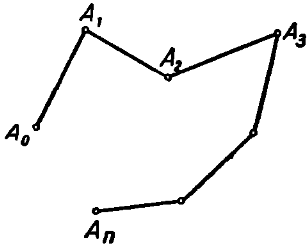


Рис. 5.

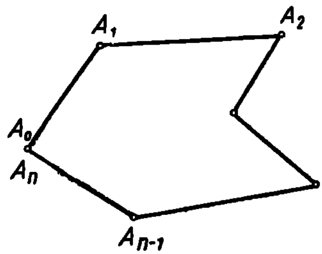


Рис. 6.

7. Имея понятие «отрезок», можно определить понятие «ломаная».

Ломаной (или ломаной линией) будем называть совокупность конечного числа направленных отрезков A_0A_1, $A_1A_2, \ldots$, $A_{n-1}A_n$, заданных в определенном порядке и расположенных в пространстве так, что конец каждого отрезка (кроме последнего) совпадает с началом следующего за ним отрезка (рис. 5).

Отрезки, составляющие ломаную, называют ее *звеньями* (или сторонами), их концы — *вершинами ломаной*, начало первого звена и конец последнего звена — соответственно *началом* и *концом* ломаной. Начало и конец ломаной называют также *концами* ломаной. Ломаная, составленная из отрезков A_0A_1, $A_1A_2, \ldots,$ A_{n-1} A_n, записывается так: $A_0A_1A_2 \ldots A_n$. Ломаная называется *замкнутой*, если ее концы совпадают: A_0 совпадает с A_n (рис. 6). Один, отдельно взятый, отрезок тоже рассматривается как частный случай ломаной.

Вместо термина «замкнутая ломаная» употребляют иногда термин «одномерный многоугольник» или просто «многоугольник».

Ломаная называется *простой*, если каждая ее точка либо принадлежит только одному ее звену, либо при-

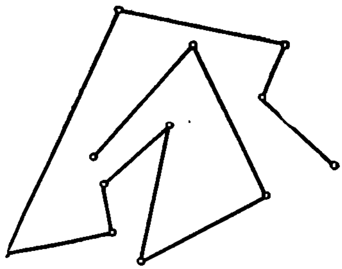


Рис. 7.

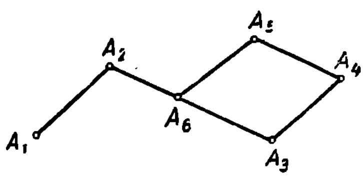


Рис. 8.

надлежит только двум звеньям, являясь их общим концом. В противном случае ломаная называется *самопересекающейся* или *непростой*. На рисунках 8 и 9 приведены примеры самопересекающихся, а на рисунках 5, 6, 7 — примеры простых ломаных.

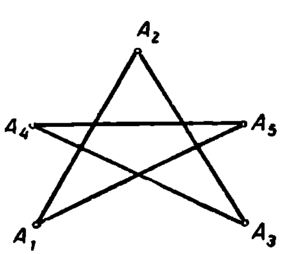


Рис. 9.

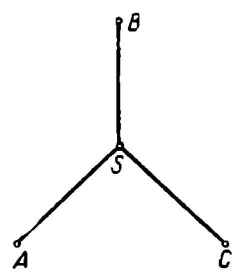


Рис. 10.

Каждая ломаная определяет некоторую точечную фигуру — множество всех точек, принадлежащих этой ломаной. Однако не следует отождествлять эту фигуру с самой ломаной. Это особенно ясно, если рассмотреть непростые ломаные. Рассмотрим, например, фигуру, изображенную на рисунке 10. Эта фигура может быть рассмотрена как множество точек незамкнутой (четырехзвенной) ломаной $ASBSC$; и в то же время та же самая фигура представляет собой множество точек замкнутой шестизвенной ломаной $SASBSCS$; совокупность же трех отрезков SA, SB, SC вовсе не является ломаной. В тех случаях, когда не могут возникнуть недоразумения, употребляют, ради краткости, вместо термина «множество точек ломаной» термин «ломаная».

Понятие ломаной используется для определения полезного в геометрии понятия «фигура Ф разбивает пространство на две части». Это значит, что множество всех точек пространства, не принадлежащих фигуре Ф, распадается на два подмножества G_1 и G_2, обладающие следующими свойствами:

1) любые две точки из одного и того же подмножества можно соединить ломаной, не имеющей общих точек с фигурой Ф;

2) всякая ломаная, соединяющая две точки из различных подмножеств, имеет общую точку с фигурой Ф.

Аналогично определяется термин «фигура Ф разбивает плоскость на две части».

Подобным же образом можно определить, что означает выражение: «Фигура разбивает пространство (или плоскость) на несколько частей».

§ 3. ОПЕРАЦИИ НАД ФИГУРАМИ

Располагая какими-либо фигурами, можно образовать новые фигуры с помощью операций, которые сейчас рассмотрим.

1. Соединением *двух или нескольких фигур называется множество всех таких точек, которые принадлежат хотя бы одной из этих фигур.* Соединение фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ обозначается так:

$$Ф_1+Ф_2, \text{ или } Ф_1 \cup Ф_2.$$

Например, соединение двух лучей Am и Bn одной прямой может представлять собой всю прямую (рис. 11, *а*), луч этой прямой (рис. 11, *б*), прямую без интервала (рис. 11, *в*).

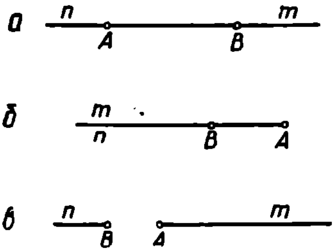


Рис. 11.

В некоторых случаях соединение известных фигур может представить опять некоторую известную фигуру. Например, соединение трех отрезков, расположенных так, что каждый конец отрезка есть общий конец каких-либо двух из этих отрезков, есть треугольник, а соединение всех окружностей данного радиуса с одним и тем же данным центром есть сфера с тем же радиусом и центром.

2. Пересечением, *или* общей частью *двух или нескольких фигур называется множество всех таких точек, которые являются общими для всех этих фигур.* Пересечение фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ обозначается так: $Ф_1 \cdot Ф_2$, или $Ф_1 \cap Ф_2$ (иногда $Ф_1 \times Ф_2$).

На рисунке 11, *а* пересечением лучей Am и Bn служит отрезок AB.

Разностью *двух фигур Φ_1 и Φ_2 называется множество всех таких точек фигуры Φ_1, которые не принадлежат фигуре Φ_2.* Например, разность между прямой и лежащим на ней интервалом есть фигура, составленная из двух лучей, принадлежащих этой прямой. Разность фигур Φ_1 и Φ_2 обозначается символом $\Phi_1 \setminus \Phi_2$.

Может случиться, что пересечение (или разность) двух фигур не содержит ни одной точки. Тогда говорят, что пересечение (соответственно разность) этих фигур есть *пустое множество.* Так, например, на рисунке 11, *в* пересечение лучей Am и Bn — пустое множество.

§ 4. РАЗЛИЧНЫЕ ПОНЯТИЯ, ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ТЕРМИН «УГОЛ»

Термин «угол» употребляется в геометрии в различных смыслах, используется для обозначения существенно различных понятий. Рассмотрим наиболее важные из них.

1. Угол между двумя лучами. Рассмотрим на плоскости фигуру, состоящую из двух лучей ($\overline{OA}$ и $\overline{OB}$), исходящих из одной точки O. Эта фигура разбивает не принадлежащие ей точки плоскости на две части.

Углом между двумя лучами, или плоским углом, или просто углом *называется фигура, состоящая из двух лучей с общим началом и одного из тех двух множеств, на которые эти лучи разбивают плоскость.* Сами лучи называются *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла.

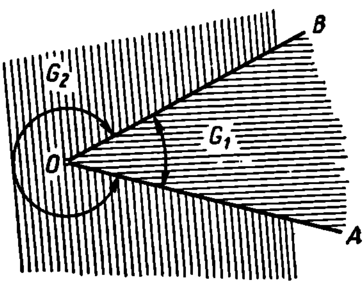


Рис. 12.

Следовательно, если иа плоскости заданы два луча $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, то существуют два угла, для которых эти лучи являются сторонами (рис. 12).

Если относительно двух лучей, о которых говорится в определении угла, еще дополнительно указано, какой считается начальным, а какой — конечным, то угол называется *ориентированным.*

Следует иметь в виду и другой смысл, который придается термину «угол между двумя лучами»; под этим понимают иногда только пару лучей, имеющих общее начало.

В школьных учебниках геометрии обычно дается такое определение угла: «Углом называется фигура, образованная двумя лучами, имеющими общую вершину». При этом выражение «образованная двумя лучами» понимается в различных местах учебника (иногда на одной и той же странице) в разных смыслах: иной раз — как «составленная из двух лучей», другой раз — как «ограниченная двумя лучами». В каждом конкретном случае необходимо уяснить себе, в каком смысле применяется термин «угол».

Особо следует рассмотреть те случаи, когда лучи $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ лежат на одной прямой. Если эти лучи не совпадают (рис. 13, *а*), то они разбивают всю плоскость на две полуплоскости, предыдущее определение применимо. Угол называется в этом случае *развернутым*.

Если лучи $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ совпадают (рис. 13, *б*), то плоскость этой парой лучей на два множества не разбивается: точки, не принадлежащие этим (совпадающим) лучам, образуют одно множество G_1, любые две точки которого можно соединить ломаной. Ради единообразия будем говорить, что и в этом случае пара лучей $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ разбивает плоскость на два множества: G_1 и пустое множество G_2. Совокупность двух совпадающих лучей $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ и области G_1 называют *полным углом*. Совокупность двух совпадающих лучей $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ называют *нулевым углом*.

Два угла называются смежными, *если их соединение есть развернутый угол, а пересечение есть их общая сторона.*

Если некоторый угол равен смежному с ним углу, то, как известно, его называют *прямым углом*.

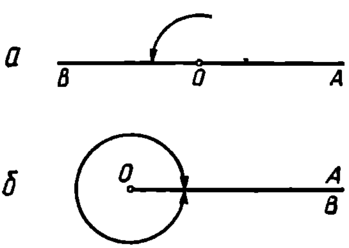


Рис. 13.

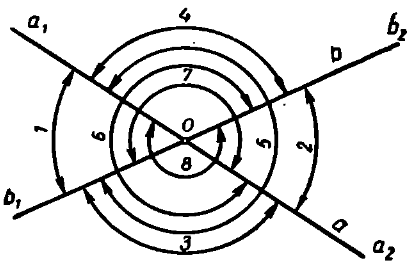


Рис. 14.

2. Угол между двумя пересекающимися прямыми. Рассмотрим на плоскости две пересекающиеся прямые a и b (рис. 14). Точка O пересечения этих прямых разбивает каждую из них на два луча: a_1, a_2 и соответственно b_1 и b_2. Углом между этими прямыми называется угол между любыми из двух лучей a_1, a_2, на которые точкой O разбита одна прямая a, и любым из двух лучей b_1, b_2, на которые точкой O разбита вторая прямая b. Всего таких углов восемь (причем четыре из них больше развернутого угла). Каждый из этих углов рассматривается как угол между данными прямыми.

Если какой-либо из углов между двумя данными прямыми линиями прямой, то данные прямые называются *перпендикулярными*.

3. Угол между двумя непересекающимися прямыми (скрещивающимися или параллельными). Рассмот-

рим два луча, исходящие из произвольной точки пространства и параллельных соответственно данным прямым, и образованный ими угол. Можно показать, что при любых двух различных выборах такой точки и таких лучей мы получим либо равные углы[1], либо углы, дополняющие друг друга до развернутого или полного угла. Любой представитель бесконечного класса возникающих таким образом плоских углов считают за угол между данными прямыми.

Итак, *углом между двумя непересекающимися прямыми называют угол между лучами, исходящими из одной и той же точки и соответственно параллельными*[2] *данным прямым*[3]. Понятно, что угол между двумя параллельными прямыми окажется либо нулевым, либо развернутым, либо полным.

4. Угол между прямой и плоскостью. Сначала следует ввести понятие о перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая называется *перпендикулярной* к плоскости, если она образует прямой угол с каждой прямой, лежащей в этой плоскости. Проекцией точки P на плоскость α называется точка пересечения этой плоскости с прямой, проходящей через точку P и перпендикулярной плоскости α. *Проекцией фигуры* Φ на плоскость α называется множество проекций всех точек этой фигуры. Если прямая не перпендикулярна и не параллельна плоскости, то легко доказать, что острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость меньше всякого угла между этой прямой и какой-либо другой прямой, лежащей в плоскости.

Действительно, пусть (рис. 15) α — плоскость, g — прямая, пересекающая плоскость α в некоторой точке P, g' — проекция прямой g на плоскость α. Пусть A — произвольная точка прямой g, отличная от P, B — проекция точки A на плоскость α. Пусть, наконец, MN — какая-либо прямая плоскости α, проходящая через точку P и отличная от прямой g', причем $\angle APM \leqslant \angle APN$. Построим на луче PM такую точку C, чтобы отрезок PC был равен отрезку PB. Сравнивая треугольники ABP и ACP, заметим, что стороны AP и BP первого треугольника соответственно равны сторонам AP и CP второго треугольника.

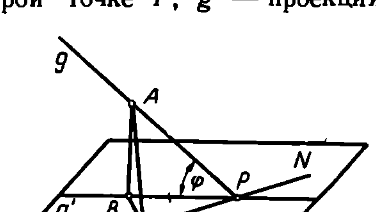


Рис. 15.

[1] Здесь мы предполагаем, что из школьного курса известно, как сравниваются два угла.

[2] Выражения «луч параллелен прямой» или «отрезок параллелен прямой» понимают в том смысле, что луч или соответственно отрезок лежит на прямой, параллельной данной.

[3] Если точка принадлежит одной из данных прямых, то один из лучей выбирается на этой прямой.

Но третья сторона AB первого треугольника меньше третьей стороны AC второго треугольника, так как отрезки AB и AC служат соответственно катетом и гипотенузой прямоугольного треугольника ABC. В треугольниках, обладающих такими свойствами, как известно, против меньшей стороны лежит и меньший угол, что и означает наличие требуемого неравенства:

$$\angle APB < \angle APC.$$

Изложенным соображением оправдывается выбор следующего определения.

Углом между прямой (не перпендикулярной плоскости) *и* плоскостью *называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость.*

Если прямая перпендикулярна плоскости, то углом между прямой и плоскостью называют любой из углов, образованных этой прямой с произвольной прямой, принадлежащей этой плоскости (все эти углы прямые).

5. Двугранный угол. Понятие двугранного угла аналогично понятию плоского угла (угла между двумя лучами). Всякая прямая MN, лежащая в некоторой плоскости α, разбивает эту плоскость на две части. Каждая из них, как известно, называется *полуплоскостью*, исходящей из прямой MN. Сама прямая MN называется *граничной прямой* для каждой из этих полуплоскостей.

Совокупность двух полуплоскостей, исходящих из одной и той же прямой, разбивает все пространство на две части. Двугранным углом (рис. 16) *называется совокупность двух полуплоскостей, исходящих из одной прямой, вместе с одной их тех частей, на которые эти полуплоскости разделяют пространство.* Сами полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, а их общая граничная прямая — *ребром* двугранного угла.

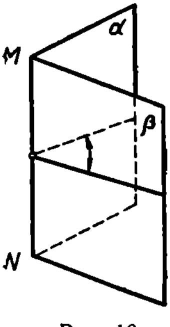


Рис. 16.

Если дополнительно указано, какая из полуплоскостей считается начальной гранью, а какая — конечной, то этот двугранный угол называется *ориентированным.*

По аналогии с плоскими углами возможно определить понятия *развернутого, полного* и *нулевого* двугранного угла, двугранного угла между двумя плоскостями, перпендикулярности двух плоскостей.

6. Линейный угол двугранного угла. Линейным углом *данного двугранного угла называют плоский угол, вершина которого лежит на ребре двугранного угла, а стороны лежат в гранях этого двугранного угла и перпендикулярны его ребру.* Таким образом, с каждым двугранным углом связывается бесконечно много линейных углов. Можно показать, что все такие углы равны между собой; это и оправдывает принятое здесь определение.

7. Многогранный угол. Если понятие двугранного угла аналогично понятию плоского угла, то понятие многогранного угла аналогично понятию замкнутой ломаной.

Многогранным углом (или двумерным многогранным углом) *называется упорядоченная совокупность конечного числа ориентированных плоских углов* A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 (рис. 17) *с общей вершиной, расположенных в пространстве так, что конечная сторона каждого угла является начальной стороной следующего угла,*

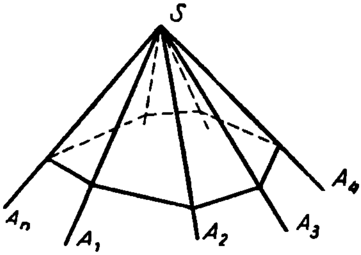


Рис. 17.

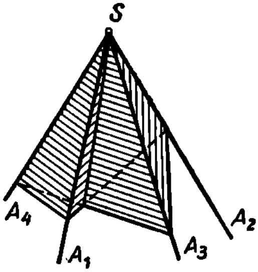


Рис. 18.

а конечная сторона последнего угла совпадает с начальной стороной первого.

Плоские углы, образующие многогранный угол, называются его *гранями*, их общая вершина называется *вершиной* многогранного угла, их стороны — *ребрами* многогранного угла.

Многогранный угол называется *простым* (не имеющим самопересечения), если каждая его точка, кроме вершины, либо принадлежит только одной грани, либо принадлежит только двум граням, являясь точкой их общего ребра. Непростой многогранный угол называют *звездчатым*. На рисунке 17 изображен простой, а на рисунке 18 — звездчатый многогранный угол.

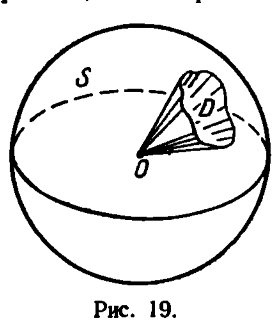


Рис. 19.

Можно показать, что всякий простой (двумерный) многогранный угол разбивает все пространство на две части. Двумерный простой многогранный угол вместе с одной из этих частей называют *трехмерным многогранным углом.*

8. Телесный угол. Трехмерный многогранный угол представляет собой частный случай телесного угла.

Возьмем на сфере S произвольного радиуса (рис. 19) какую-либо замкнутую область[1] D (область вместе с ее границей).

---

[1] Здесь мы довольствуемся пока интуитивными представлениями об области и ее границе, имеющимися у нашего читателя. В следующем параграфе мы еще возвратимся к этому понятию.

Рассмотрим теперь соединение всех лучей, исходящих из центра O сферы и проходящих через точки области D. Образовавшаяся фигура называется *телесным углом* с вершиной O и опорной областью D.

Чтобы не возвращаться более к этому вопросу, упомянем здесь еще об измерении телесных углов.

Будем полагать, что сфера S имеет радиус, равный единице. В качестве меры телесного угла принимают площадь его опорной области D (на единичной сфере). Если площадь области равна единице, то говорят, что мера телесного угла равна 1 *стерадиану*. Так как площадь всей единичной сферы равна 4π единицам, то отсюда ясно, что мера телесного угла не может быть больше, чем 4π стерадиан.

С понятием телесного угла приходится встречаться в физике, в особенности в вопросах, связанных с распространением излучений (в частности, при измерении освещенности).

§ 5. О СОДЕРЖАНИИ ПОНЯТИЙ «ТЕЛО», «ПОВЕРХНОСТЬ», «ЛИНИЯ» В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Понятия «тело», «поверхность», «линия» встречаются уже на первых страницах школьных учебников геометрии. Обычно там приводятся различные разъяснения описательного характера, имеющие своей целью возбудить у школьника, не искушенного в геометрии, первые представления об этих понятиях.

В некоторых учебниках по геометрии приводится такое определение понятия «тело»: «Тело — это часть пространства, ограниченная со всех сторон» (см., например, [20], ч. I, стр. 4).

Что касается понятий поверхности и линии, то о них, следуя Евклиду, обычно сообщают (см., например, [31], стр. 5—6): «граница тела есть поверхность», «граница поверхности есть линия»,— предложения, которые большинством учащихся воспринимаются как определения понятий «поверхность» и «линия».

Перед вдумчивым учеником и вдумчивым учителем должны возникнуть, и действительно возникают, многочисленные вопросы, относящиеся к этим важным понятиям геометрии. Приведем несколько таких вопросов.

1) Отрезок и круг — разве это не «части пространства»? И разве они не «ограничены со всех сторон»? Значит ли это, что отрезок и круг — тела?

2) Следует ли понимать фразу «граница тела есть поверхность» как определение понятия «поверхность»? Если принять такое определение, то полусферу, например, уже нельзя считать поверхностью.

Если несколько видоизменить это определение и считать, что поверхность есть граница тела или какая-либо ее часть, то полусфера подойдет под такое определение, ибо она есть часть границы некоторого шара. Но ведь и окружность можно рассматривать как часть границы некоторого шара, так что при этом мы и окружность должны рассматривать как поверхность, что, очевидно, противоречит нашим привычным представлениям.

3) Аналогичные вопросы возникают и относительно предложения «граница поверхности есть линия». Следует ли здесь понимать под «границей поверхности» всю эту границу или только ее часть? Если всю, то границей какой поверхности служит отрезок? А если под границей понимать и часть всей границы, то тогда и точку или пару точек следует считать линией.

Рассмотренные в предыдущих параграфах понятия «точка», «фигура», «шар», «ломаная» и другие позволяют дать удовлетворительные определения интересующих нас понятий: «тело», «поверхность», «линия».

2. Геометрическое тело. Возьмем в трехмерном пространстве какую-либо точку P. Ее *окрестностью* (относительно трехмерного пространства) назовем всякий шар с центром в этой точке.

Рассмотрим теперь в пространстве какую-нибудь фигуру Φ. Пусть P — какая-либо точка, которая может принадлежать, а может и не принадлежать фигуре Φ. Возьмем какую-либо окрестность точки P и выясним, сколько там окажется точек фигуры Φ. Если окажется, что при любом выборе окрестности точки P в этой окрестности содержится бесконечно много точек фигуры Φ, то назовем точку P *точкой сгущения для фигуры* Φ (или *предельной* точкой). Так, например, для интервала AB точками сгущения служат все точки отрезка AB (включая его концы). Для круга с центром O и радиусом r точками сгущения будут все его точки.

Из этих примеров видно, что в одних случаях фигура содержит все свои точки сгущения, а в других лишь некоторые из них (быть может, даже ни одной). Фигура, которая содержит все свои точки сгущения, называется *замкнутой*[1]. Примерами замкнутых фигур могут служить отрезок, луч, круг, шар, двугранный угол, пара точек. Напротив, интервал, внутренность шара не относятся к замкнутым фигурам.

Теперь мы намерены выяснить, каков точный смысл нашего «житейского» представления о фигуре, «состоящей из одного куска», и о фигуре, «состоящей из нескольких изолированных кусков». Будем говорить, что две фигуры изолированы одна от другой, если они не имеют общих точек и если ни одна из этих фигур не содержит точек сгущения для второй фигуры. Так, например, внутренность окружности и сама окружность — не изолированные фигуры, а окружность и ее центр — изолированные.

Фигура называется *связной* (или состоящей из одного куска), если ее невозможно разбить на две изолированные фигуры, т. е.

---

[1] Не следует смешивать понятие «замкнутая фигура» с понятием «замкнутая линия» — между ними нет ничего общего.

ее нельзя представить в виде соединения двух изолированных фигур. Круг — пример свя́зной фигуры, а фигура, состоящая из сферы и ее центра,— пример несвязной фигуры.

Будем называть фигуру *ограниченной*, если она целиком принадлежит некоторому шару достаточно большого радиуса. Простейшие примеры ограниченных фигур: точка, отрезок, окружность, шар. Прямая, полуплоскость, трехгранный угол — примеры неограниченных фигур.

Теперь отдадим себе отчет в том, какой смысл мы вкладываем в выражения: «Точка лежит внутри данной фигуры Ф» и «Точка лежит на границе данной фигуры Ф».

Точку P фигуры Ф называют ее *внутренней* точкой (относительно трехмерного пространства), если она принадлежит фигуре Ф вместе с некоторой своей окрестностью. Например, в силу этого определения внутренними точками шара с центром O и радиусом r будут все точки, отстоящие от центра O на расстоянии, меньшем чем r. Напротив, круг не имеет (относительно трехмерного пространства) ни одной внутренней точки, ибо всякий шар с центром в какой-либо точке круга не принадлежит, очевидно, целиком этому кругу. То же можно сказать про любую другую плоскую фигуру: она не содержит внутренних относительно трехмерного пространства точек. Заметим также, что и для сферы ни одна ее точка не является внутренней относительно трехмерного пространства.

Точка P называется *граничной* для фигуры Ф относительно трехмерного пространства, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие фигуре Ф, так и точки, ей не принадлежащие. Граничная точка может принадлежать фигуре Ф, а может ей и не принадлежать. Множество всех граничных точек некоторой фигуры Ф образует фигуру, называемую *границей* фигуры Ф. Например, граничными точками шара с центром O и радиусом r служат все точки сферы того же центра и того же радиуса; эта сфера и будет границей рассматриваемого шара. Границей круга (относительно трехмерного пространства) служит сам этот круг. Границей полупространства служит плоскость.

Фигура называется *областью трехмерного пространства*, если: 1) все ее точки внутренние и 2) любые две ее точки можно соединить ломаной, целиком составленной из точек этой фигуры.

Второе требование можно заменить другим, а именно: фигура должна быть свя́зной.

Примерами областей могут служить: внутренность шара, полупространство (без его граничной плоскости), все пространство.

Если к некоторой области присоединить ее границу, то образовавшуюся фигуру называют *замыканием* этой области (или замкнутой областью).

Термином «тело» обозначают в элементарной геометрии такую фигуру Ф, которая представляет собой замыкание некоторой ограниченной области трехмерного пространства. Иными словами, фигура Ф называется *телом*, если множество ее внутренних точек образует некоторую ограниченную область, а замыканием этой области служит сама фигура Ф. Так, например, шар подходит под определение тела: он представляет собой замыкание области — внутренности шара. Отрезок, круг, любая плоская фигура заведомо не подходят под приведенное здесь определение тела. Действительно, всякая область содержит хотя бы одну внутреннюю точку и, следовательно, содержит некоторый шар. Таким же свойством обладает, очевидно, и всякое тело (как замыкание области). Но плоская фигура не содержит никакого шара, так что она не может быть телом. Не подойдут под определение тела и такие фигуры: внутренность шара (ибо это незамкнутая область); шар, из которого выброшен какой-либо его радиус (это тоже незамкнутая область); шар, к которому присоединен отрезок — продолжение радиуса (рис. 20), ибо множеством внутренних точек такой фигуры служит внутренность шара, а замыканием внутренности шара никак не может оказаться шар с присоединенным отрезком.

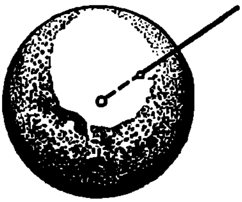


Рис. 20.

Для дальнейшего полезно ввести еще понятие «тело в широком смысле слова». Будем понимать под этим всякую такую фигуру, которая служит замыканием какой-либо (не обязательно ограниченной) области. Примерами могут служить полупространство, слой между двумя параллельными плоскостями.

3. До сих пор мы рассматривали фигуры, которые могли произвольно располагаться в трехмерном пространстве. Будем теперь рассматривать фигуры, которые целиком принадлежат некоторой фиксированной, заранее выбранной *плоскости*. По аналогии с изложенным ранее можно и на плоскости ввести понятия ограниченной фигуры, окрестности точки, внутренней точки, границы, замкнутой области. *Ограниченная* фигура — это фигура, принадлежащая внутренности некоторого круга; *окрестность точки* — круг с центром в этой точке; *внутренняя* (относительно выбранной плоскости) *точка* фигуры характеризуется тем, что некоторая ее окрестность целиком принадлежит фигуре, и т. п.

На плоскости иногда приходится рассматривать фигуры, являющиеся аналогами тел в пространстве. Такая фигура на плоскости, которая служит замыканием некоторой плоской области, не имеет специального общепринятого названия (в отличие от аналогичного понятия тела в пространстве). Такие фигуры иногда (весьма неудачно) называют *плоскими фигурами*. Удобнее был бы, например, термин «плоская пластинка» или просто *пластинка*.

4. П о в е р х н о с т ь. Фигуру S будем называть *оболочкой* (или *полной поверхностью*), если существует такое тело T (понимаемое в широком смысле), границей которого служит фигура S. Здесь

существенно то, что S содержит *все* граничные точки тела T. Например, сфера (радиуса r с центром O) — это оболочка, ибо она граница шара с тем же центром и тем же радиусом. Полусфера, круг, отрезок не являются оболочками: нет такого тела, у которого множество *всех* граничных точек образовало бы полусферу, или круг, или отрезок.

Наряду с понятием оболочки выделим еще понятие *поверхности*. Введем его по аналогии с понятием тела. Для этой цели мы введем для фигур, лежащих на оболочке S, понятия внутренней точки относительно этой оболочки, граничной точки, границы, области, замыкания области точно так же, как мы выше ввели аналогичные понятия относительно трехмерного пространства.

Пусть G (рис. 21) — какая-либо фигура, целиком принадлежащая некоторой оболочке S, а P — какая-нибудь точка этой фи-

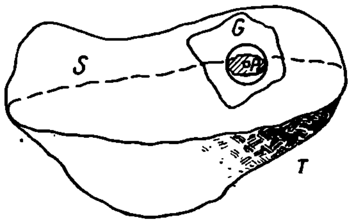


Рис. 21.

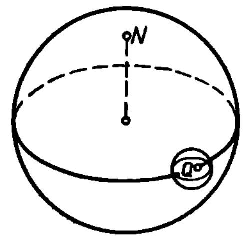


Рис. 22.

гуры. Окружим точку P окрестностью (шаром с центром в точке P) и обратим свое внимание на те точки оболочки S, которые попали в эту окрестность. Если все точки оболочки S, попавшие в некоторую достаточно малую окрестность точки P, принадлежат также фигуре G, то точку P назовем *внутренней* точкой фигуры G относительно оболочки S.

Точку Q (принадлежащую или не принадлежащую фигуре G) назовем *граничной точкой фигуры* G относительно оболочки S, если в каждой (сколь угодно малой) окрестности точки Q имеются и такие точки оболочки S, которые принадлежат фигуре G, и такие точки этой оболочки, которые фигуре G не принадлежат. Совокупность всех граничных точек фигуры G называется ее *границей* на оболочке S. Для примера рассмотрим сферу (земной глобус) и на ней полусферу (северное полушарие), без ее края (экватора). Сфера — это оболочка в смысле введенного выше определения. Северный полюс N (рис. 22) служит для полусферы внутренней ее точкой (относительно данной сферы). А каждая точка Q экватора будет для этой полусферы граничной точкой. Она осталась бы граничной для полусферы и в том случае, когда мы причислили бы эту точку к северной полусфере.

Фигура G называется *областью* относительно оболочки S, если: 1) все точки этой фигуры являются внутренними относительно

S и 2) фигура G является связной. Так, например, областью на земной сфере будет северная полусфера без экватора.

Если к некоторой области G (относительно оболочки S) присоединить ее границу (относительно этой оболочки), то образовавшуюся таким образом фигуру назовем *замыканием* области G.

Фигура Ф называется *поверхностью*, если существует такая оболочка S и такая область G на ней, что замыканием последней служит фигура Ф. Так, например, северная полусфера (рис. 22) вместе с экватором является поверхностью. Под это определение поверхности подходит каждая полусфера (если считать включенной в нее и ее границу), круг, полуплоскость, сфера, плоскость. А окружность, полуокружность, отрезок, луч, прямая под определение поверхности не подходят.

5. Линия. К понятию «линия» мы можем прийти, отправляясь от совершенно различных наглядных представлений. В частности:

1) линия — это граница поверхности;

2) линия — это фигура, имеющая только одно измерение («длину», но не «ширину» или «толщину»);

3) линия — это след движущейся точки.

В зависимости от исходного интуитивного представления мы придем, естественно, к различным и, вообще говоря, неэквивалентным определениям понятия «линия». Наиболее близкое к характеру школьного курса геометрии определение мы получим, отправляясь от наглядного представления о линии как о границе поверхности. Это определение строится аналогично данному выше определению поверхности.

Пусть П (рис. 23) — какая-либо поверхность. Рассмотрим граничные точки этой поверхности относительно той оболочки S, на которой П лежит. Множество L всех таких граничных точек этой поверхности П (относительно оболочки S) назовем *полным контуром* или, короче, *контуром* этой поверхности. Например, на сфере окружность — контур, а полуокружность — не контур.

Пусть g — какая-либо фигура, которая целиком принадлежит некоторому контуру L, и P (рис. 23) — какая-либо точка на L. Окружим точку P окрестностью (шаром с центром в точке P) и будем интересоваться теми точками контура L, которые попали в эту окрестность. Если окажется, что все точки контура L, попавшие в некоторую достаточно малую окрестность точки P, принадлежат также фигуре g, то точку P называют *внутренней точкой фигуры* g (относительно контура L).

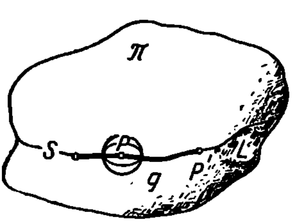


Рис. 23.

Точка P' называется *граничной* для фигуры g, если в любой ее окрестности содержатся как такие точки контура L, которые принадлежат фигуре g, так и такие, которые фигуре g не принадлежат.

Фигура g называется *линейной* (или одномерной) *областью* на полном контуре L, если: 1) каждая ее точка является внутренней для этой фигуры относительно L и 2) эта фигура связна. Так, например, интервал или полуокружность без концов — примеры линейных областей; отрезок (включая его концы) не является линейной областью.

Если к области g на контуре L присоединить все ее граничные точки, то образуется фигура, которая называется *замыканием области* g (относительно контура L). Например, замыканием интервала AB служит отрезок (сегмент) AB.

Фигура Ф называется *линией* (по Евклиду), если существуют такой контур L и такая область g на нем, что замыканием ее служит сама фигура Ф.

Отрезок, полуокружность (вместе с ее концами) — простейшие примеры линий по Евклиду.

Другие из упомянутых выше наглядных подходов к представлению о линии приводят к иным определениям этого понятия[1]. В течение последнего столетия такие определения предложили К. Жордан, Г. Кантор и П. С. Урысон. Эти определения обычно рассматриваются в курсе теории функций действительного переменного.

§ 6. О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

1. Большое число предложений элементарной геометрии трактует об общих элементах прямых и плоскостей, об условиях и признаках существования или отсутствия таких общих элементов (точек, прямых).

В основе этих рассуждений лежат *аксиомы принадлежности*, из которых перечислим некоторые:

I. *Существует прямая, проходящая через любые две точки, и притом единственная.*

II. *Существует бесконечно много точек, не принадлежащих данной прямой, и существует бесконечно много точек, принадлежащих этой прямой.*

III. *Если три точки не принадлежат одной прямой, то существует, и притом единственная, плоскость, проходящая через эти три точки.*

IV. *Если две точки какой-либо прямой принадлежат какой-либо плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.*

V. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую.*

VI. *Существуют точки, лежащие вне данной плоскости.*

---

[1] В § 12 главы IV приведен один из вариантов определения понятий поверхности и линии.

К этой же группе аксиом следовало бы отнести и *аксиому о параллельности*, в которой также говорится об общих точках у двух прямых:

Через точку A вне данной прямой a (рис. 24) *проходит единственная такая прямая p, которая лежит с данной прямой a в одной и той же плоскости, но не имеет с этой прямой a общей точки.*

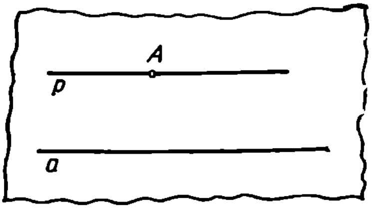


Рис. 24.

Среди предложений о взаимном расположении прямых и плоскостей особую роль играют предложения о параллельности и перпендикулярности. В некоторых предложениях сочетаются оба эти понятия. Остановимся здесь на некоторых определениях, напомним признаки параллельности и перпендикулярности и рассмотрим некоторые свойства параллельных и перпендикулярных прямых и плоскостей.

2. Возможны четыре случая взаимного расположения двух прямых: а) существует единственная точка, принадлежащая обеим прямым, тогда прямые называются *пересекающимися*; б) не существует у прямых общей точки, но существует плоскость, которая содержит в себе обе прямые, тогда прямые называются *параллельными*; в) нет плоскости, которая содержала бы обе прямые, тогда прямые называются *скрещивающимися*; г) две прямые имеют более одной общей точки, т. е. *совпадают*.

Для прямой и плоскости возможны три случая их взаимного расположения: прямая и плоскость могут иметь либо одну, либо бесконечно много, либо ни одной общей точки. В зависимости от этого говорят соответственно, что прямая *пересекает* плоскость, *лежит* в плоскости или *параллельна* плоскости.

Две несовпадающие плоскости либо имеют общую точку (и тогда, в силу аксиом III и V, они имеют общую прямую), либо не имеют ни одной общей точки.

В первом случае плоскости называются *пересекающимися*, во втором — *параллельными*.

3. Признаки параллельности двух прямых обычно даются (в курсе планиметрии) через зависимости между углами, образованными этими прямыми и третьей прямой, пересекающей данные прямые. Известны следующие признаки параллельности прямой и плоскости или двух плоскостей, также связанные со сравнением углов:

1) Если две различные плоскости α и β перпендикулярны одной и той же прямой p, то они параллельны (рис. 25).

2) Если плоскость α и прямая a, не принадлежащая этой плоскости, перпендикулярны одной и той же прямой p (рис. 26) или одной и той же плоскости σ (рис. 27), то они параллельны.

Некоторые признаки параллельности двух плоскостей (или прямой и плоскости) опираются на параллельность каких-либо прямых.

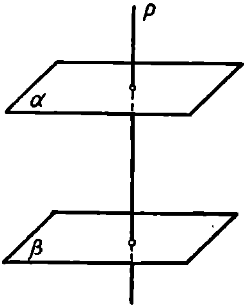


Рис. 25.

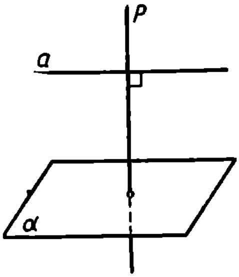


Рис. 26.

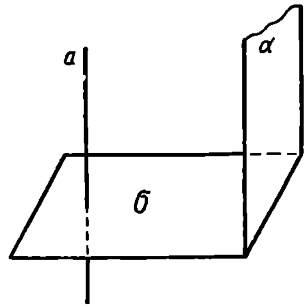


Рис. 27.

3) Если данная прямая b, не лежащая в плоскости α, параллельна какой-либо прямой a, лежащей в этой плоскости, то данная прямая b параллельна плоскости α (рис. 28).

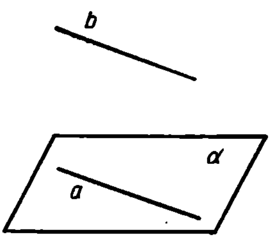


Рис. 28.

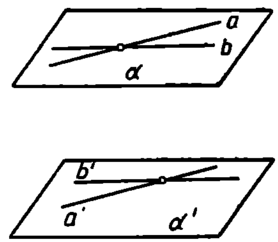


Рис. 29.

4) Если две прямые a, b одной плоскости α соответственно параллельны двум пересекающимся прямым a', b' другой плоскости α', то эти плоскости параллельны (рис. 29). Если опустить в по-

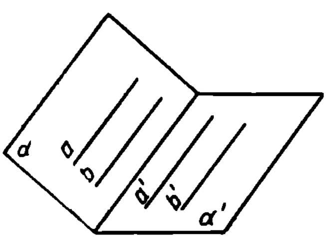


Рис. 30.

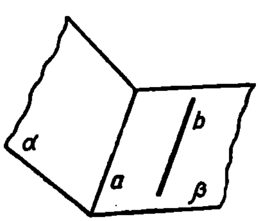


Рис. 31.

следней теореме слово «пересекающимся», то теорема уже не будет верна (см. рис. 30).

Наконец, существуют и такие признаки параллельности, в которых утверждается параллельность двух прямых, если известно, что параллельны прямая и плоскость или две плоскости. Напомним два таких признака:

1) Если из двух прямых (a и b) одна (a) является линией пересечения двух плоскостей (α и β), а вторая (b) лежит в одной из этих плоскостей (β) и параллельна другой (α), то прямые параллельны (рис. 31).

2) Если две прямые (a и b) служат линиями пересечения двух параллельных плоскостей (α и β) с какой-либо третьей плоскостью (γ), то эти прямые параллельны (рис. 32).

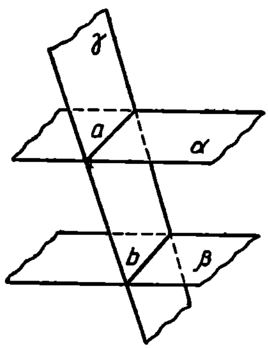


Рис. 32.

4. Транзитивность параллельности. Теоремы о транзитивности параллельности выражают признаки, которые позволяют судить о параллельности двух плоскостей или прямых, если известно, что каждая из них параллельна какой-либо третьей прямой или плоскости. Напомним несколько таких теорем.

1) Если две несовпадающие прямые параллельны третьей прямой, причем эти три прямые лежат в одной и той же плоскости, то данные две прямые параллельны.

Это предложение представляет собой тривиальное следствие из аксиомы о параллельных и по существу представляет собой перефразировку этой аксиомы. Теорема остается справедливой, если отбросить требование, чтобы три прямые лежали в одной плоскости:

2) Две (несовпадающие) прямые, порознь параллельные третьей, параллельны между собой.

Аналогичная теорема справедлива и для плоскостей:

3) Если две (несовпадающие) плоскости порознь параллельны третьей плоскости, то они параллельны между собой.

Нетрудно убедиться, что это предложение равносильно такому: через точку вне данной плоскости проходит единственная плоскость, параллельная данной. Это предложение представляет собой пространственный аналог аксиомы о параллельных. Оно может быть доказано на основании аксиомы о параллельных.

4) Плоскость и не лежащая в ней прямая параллельны между собой, если они порознь параллельны одной и той же плоскости (или одной и той же прямой).

Заметим попутно, что если две прямые порознь параллельны одной и той же плоскости или если две плоскости порознь параллельны одной и той же прямой, то они могут и не быть параллельными между собой.

5. Перпендикулярность прямых и плоскостей. Перпендикулярность (ортогональность) — важный частный случай взаимного расположения прямых и плоскостей.

Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой. Это определение не предполагает пересечения данных прямых: они могут оказаться и скрещивающимися. Поэтому через одну и ту же точку P пространства, лежащую вне данной прямой, проходит бесконечно много прямых, перпендикулярных данной (они заполняют целую плоскость).

Обратим еще внимание на выражение: «Перпендикуляр, опущенный из точки P на прямую AB». Под этим обычно понимают отрезок, соединяющий точку P и точку Q пересечения прямой AB с прямой, проходящей через P, перпендикулярной к AB и пересекающей AB (рис. 33).

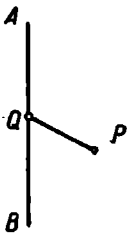


Рис. 33.

Иногда термином «перпендикуляр, опущенный из P на AB» обозначается не отрезок PQ, а прямая PQ.

С определением понятия «прямая, перпендикулярная плоскости» мы уже встречались выше. Одним из наиболее употребительных признаков перпендикулярности прямой к плоскости является так называемая теорема о двух перпендикулярах: *Если* (рис. 34) *прямая b перпендикулярна каким-либо двум пересекающимся прямым* (a_1 и a_2), *лежащим в некоторой плоскости α, то эта прямая b перпендикулярна самой плоскости α.*

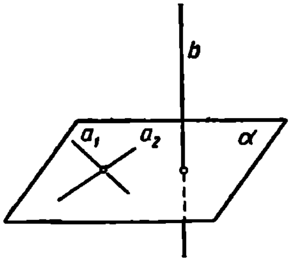


Рис. 34.

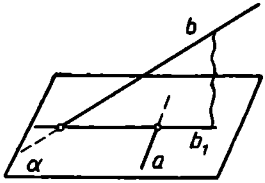


Рис. 35.

В школьных учебниках часто еще дополнительно требуют, чтобы прямые a_1 и a_2 проходили через точку пересечения прямой b с плоскостью α. Такое ограничение излишне.

Понятие о перпендикуляре к плоскости используется также в формулировке наиболее употребительного признака перпендикулярности двух прямых — в теореме о трех перпендикулярах: *Наклонная b к плоскости α и проекция b_1 этой наклонной на ту же плоскость либо одновременно перпендикулярны, либо одновременно не перпендикулярны к прямой a, лежащей в этой плоскости* (рис. 35).

Формулировки этого признака, даваемые в школьных учебниках, иногда включают требование, чтобы прямая a, лежащая в плоскости, проходила через точку пересечения наклонной с плоскостью. Это требование можно, и обычно целесообразно, опустить.

§ 7. ОБ ОТЫСКАНИИ ФИГУР ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМУ СВОЙСТВУ ИХ ТОЧЕК

1. Геометрическая фигура может быть задана различными способами: как пересечение или соединение данных фигур, путем указания определяющего ее свойства, путем указания свойства, которым обладает каждая ее точка, и т. п. Так, например, один и тот же отрезок AB (рис. 36) можно задать: 1) как пересечение лучей AM и BN; 2) как диаметр данной окружности ω, перпендикулярный к данной прямой l; 3) как совокупность середин всех хорд окружности ω, параллельных прямой l, и другими способами.

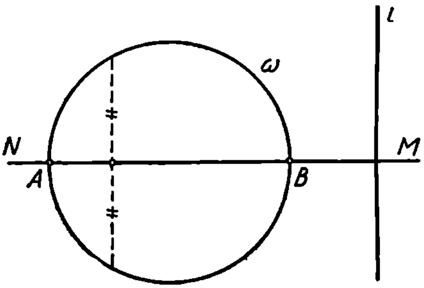


Рис. 36.

Чаще всего фигура задается путем указания свойства, которым обладают все точки этой фигуры и только они. Такую фигуру называют иногда, как уже отмечалось, *геометрическим местом точек*, обладающих указанным свойством.

В нашем примере отрезок AB является геометрическим местом середин хорд окружности ω, параллельных прямой l.

Свойство точек, при помощи которого задается та или иная геометрическая фигура, называется *характеристическим свойством точек этой фигуры.*

Новые фигуры вводятся в геометрию обычно именно посредством указания характеристического свойства их точек. Так определяются, например, окружность и сфера (в школьном курсе геометрии), а также эллипс, гипербола и парабола (в курсе аналитической геометрии). Характеристическим свойством точек пользуются также и при составлении уравнений линий и поверхностей в аналитической геометрии.

Чтобы доказать, что фигура Ф есть множество всех точек, обладающих указанным свойством, надо доказать следующие два взаимообратных предложения: 1) каждая точка фигуры Ф обладает этим свойством; 2) каждая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит фигуре Ф.

2. Простейшие плоские фигуры, задаваемые характеристическими свойствами их точек, рассматриваются в школьном курсе геометрии. Напомним важнейшие из них.

1) Множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии r от некоторой данной точки O (этой плоскости), есть по определению окружность радиуса r с центром в точке O.

2) Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных (в этой плоскости) точек, есть прямая, проходящая через

середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная к прямой, соединяющей данные точки.

Эту прямую называют иногда *симметралью* или *медиатрисой* данных точек.

3) Множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной (в этой плоскости) прямой, есть пара прямых, параллельных данной прямой.

4) Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных параллельных прямых (этой плоскости), есть некоторая прямая, параллельная данным прямым.

Эту прямую называют иногда *средней линией* данных параллельных прямых.

5) Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых (этой плоскости), представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, являющиеся биссектрисами углов, образуемых данными прямыми.

3. Приведем еще некоторые примеры нахождения плоских фигур по характеристическому свойству их точек.

Пример 1. Пусть даны две параллельные прямые a и b и перпендикулярная к ним прямая c, лежащие в одной плоскости (рис. 37). Найдем фигуру, состоящую из всех точек данной плоскости, равноудаленных от этих трех прямых.

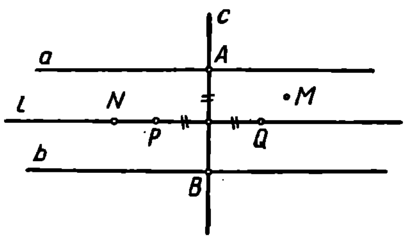


Рис. 37.

Пусть $A = a \times c$, $B = b \times c$. Проведя через середину отрезка AB прямую l, параллельную прямым a и b, и взяв на этой прямой точки P и Q, расположенные по разные стороны от прямой c на расстоянии $\frac{1}{2} AB$ от нее, легко заметить, что каждая из этих точек P и Q одинаково удалена от всех трех данных прямых a, b и c. Других точек плоскости, обладающих таким свойством, не существует: если точка M не принадлежит прямой l, то она неодинаково удалена от прямых a и b; если же точка N расположена на прямой l и не совпадает ни с P, ни с Q, то нетрудно понять, что она неодинаково удалена от прямых a и c. Таким образом, пара точек P, Q и является множеством всех точек плоскости, расстояния которых от прямых a, b и c одинаковы.

Пример 2. Выясним, какова фигура, состоящая из всех точек (данной плоскости), для которых сумма расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному отрезку.

Пусть a и b — данные параллельные прямые, h — расстояние между ними, s — данный отрезок. Заметим прежде всего, что для каждой точки M, лежащей на любой из данных прямых, а также для всякой точки N, лежащей в полосе между этими прямыми (рис. 38), сумма расстояний от заданных прямых равна h. Для остальных же точек плоскости (например, для точки P) эта сумма больше h. Отсюда ясно:

1) Если $s<h$, то искомая фигура есть пустое множество.

2) Если $s=h$, то искомая фигура есть множество всех точек, расположенных на заданных прямых и в полосе между ними.

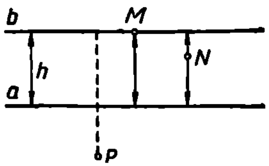


Рис. 38.

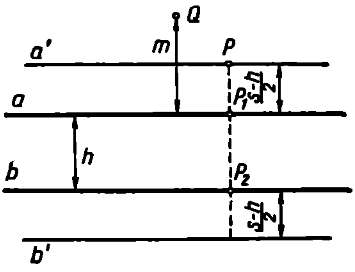


Рис. 39.

3) Остается еще случай $s>h$.

Докажем, что искомая фигура в этом случае есть пара прямых.

Пусть a' и b' — пара прямых, параллельных данным прямым a и b, причем каждая из прямых a' и b' расположена вне полосы, ограниченной прямыми a и b, и отстоит от одной из этих прямых на расстоянии $\frac{s-h}{2}$.

Пусть (см. рис 39) точка P принадлежит прямой a' (или b'). Тогда сумма расстояний точки P от прямых a и b равна:

$$PP_1+PP_2=\frac{s-h}{2}+\left(\frac{s-h}{2}+h\right)=s.$$

Пусть точка Q не принадлежит ни прямой a', ни прямой b'. Докажем, что сумма расстояний такой точки от прямых a и b не равна s. Если точка Q лежит в полосе между данными прямыми a и b или на одной из них, то сумма ее расстояний от данных прямых равна h и, следовательно, меньше s. Пусть теперь точка Q — вне этой полосы и пусть, для определенности, она расположена с той стороны от полосы, где лежит прямая a'. Обозначим расстояние точки Q от прямой a через m, тогда $m\neq\frac{s-h}{2}$. Следовательно, сумма расстояний точки Q от данных прямых a и b равна

$$m+(m+h)=2m+h\neq 2\cdot\frac{s-h}{2}+h,$$

т. е. эта сумма не равна s. Итак, доказано, что совокупность двух прямых a' и b' является искомой фигурой.

Разнообразные примеры определения фигур по характеристическому свойству их точек можно найти в связи с употреблением метода координат. Если на плоскости выбрана какая-либо система координат, то каждое уравнение, связывающее координаты точек, определяет множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

П р и м е р 3. Представим себе, что на плоскости выбрана некоторая прямоугольная система координат xOy. Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y = 1.$$

Заменяя $\sin^2 \pi x$ через $1 - \cos^2 \pi x$, приходим к более простому соотношению:

$$\cos^2 \pi x = \cos^2 \pi y,$$

или

$$\frac{1+\cos 2\pi x}{2} = \frac{1+\cos 2\pi y}{2},$$

т. е.

$$\cos 2\pi x = \cos 2\pi y.$$

Последнее соотношение удовлетворяется при условии $2\pi y = 2\pi n \pm 2\pi x$, т. е. при условии $y = \pm x + n$, где n — любое целое число. Таким образом, множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y = 1$, представляет собой сеть всех прямых, имеющих угловой коэффициент 1 или —1 и пересекающих оси координат в точках с целочисленными координатами (рис. 40).

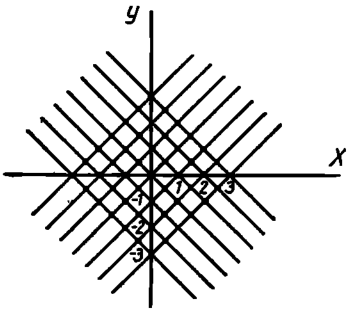


Рис. 40.

4. Наиболее употребительные в элементарной геометрии примеры определения пространственных фигур посредством характеристического свойства их точек сводятся к двум основным случаям:

1) Рассматривается множество точек, находящихся на данном расстоянии d от какой-либо данной фигуры Φ_0, т. е. фигура Φ, состоящая из всех таких точек M, что

$$\varrho(M, \Phi_0) = d,$$

где d постоянно.

2) Рассматривается множество точек, равноудаленных от двух (или более) данных фигур Φ_1 и Φ_2, т. е. фигура Φ, состоящая из всех таких точек M, что

$$\varrho(M, \Phi_1), = \varrho(M, \Phi_2).$$

Если изменять данные фигуры, то можно получить много различных конкретных примеров, среди которых содержатся, в частности, и те, которые рассматриваются в школьном курсе геометрии.

Рассмотрим сначала несколько фигур, определяемых как указано в п. 1.

1. 1. Если Φ_0 есть точка O, то Φ есть сфера (O, d) по определению.

1. 2. Если Φ_0 есть плоскость α, то Φ есть совокупность двух плоскостей β и γ, параллельных плоскости α и расположенных по разные стороны от плоскости α.

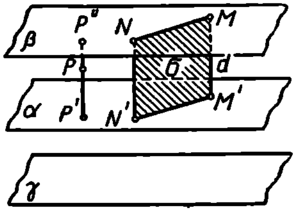


Рис. 41.

Действительно, пусть M — одна из точек Φ, так что перпендикуляр MM' из M на плоскость α (рис. 41) равен d. Проведем через M плоскость β, параллельную α. Пусть N — любая точка плоскости β и пусть $NN' \perp \alpha$. Тогда $NN' \parallel MM'$, как два перпендикуляра к одной плоскости α, а $MN \parallel M'N'$, как линии пересечения двух параллельных плоскостей α и β третьей плоскостью σ, определяемой параллельными прямыми MM' и NN'. Значит,

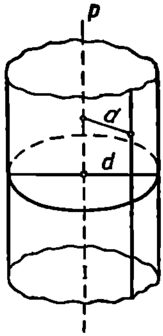


Рис. 42.

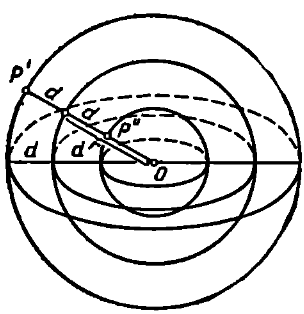


Рис. 43.

$MNN'M'$ — параллелограмм, и поэтому $NN' = MM' = d$. Следовательно, плоскость β принадлежит Φ. Ясно, что также принадлежит Φ и плоскость γ, расположенная по другую сторону α на таком же расстоянии. С другой стороны, легко заметить, что Φ не содержит других точек, кроме точек плоскостей β и γ. Действительно, пусть какая-либо точка P не принадлежит ни β, ни γ. Допустим, ради определенности, что она расположена по ту же сторону от плоскости α, что и плоскость β. Пусть PP' — перпендикуляр из P на α, и P'' — точка пересечения луча $\overline{P'P}$ с плоскостью β. P не совпадает с P'', так как P не принадлежит β. Значит, $PP' \neq P''P' = d$.

1. 3. Если Φ_0 есть прямая p, то Φ есть круглая цилиндрическая поверхность с осью p и радиусом d (рис. 42).

1. 4. Если Φ_0 — сфера $\omega(O, r)$, то:

1) при $d<r$ Φ есть совокупность двух сфер $(O, r+d)$ и $(O, r-d)$, концентрических с ω (рис. 43);

2) при $d=r$ Φ есть совокупность сферы $(O, r+d)$ и точки O;

3) при $d>r$ Φ есть сфера $(O, r+d)$. Никакая точка, внутренняя к сфере (O, r), не может быть удалена от этой сферы на расстояние, большее r.

Рассмотрим теперь несколько примеров фигур, состоящих из точек, равноудаленных от двух данных фигур Φ_1 и Φ_2.

2. 1. Φ_1 — точка A, Φ_2 — точка B. Тогда Φ есть плоскость α, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно этому отрезку. Докажем это.

Пусть M (рис. 44) — какая-либо точка плоскости α. Прямоугольные треугольники AOM и BOM равны по двум катетам. Следовательно, $AM \equiv BM$, т. е. M равноудалена от A и B. Значит, $M \in \Phi$.

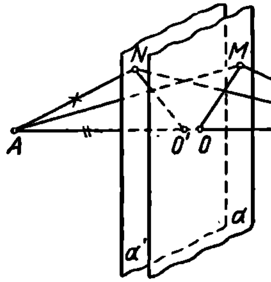


Рис. 44.

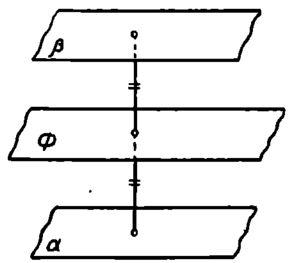


Рис. 45.

Обратно, пусть $N \in \Phi$, т. е. пусть $AN \equiv BN$. Проведем через N плоскость $\alpha' \perp AB$, и пусть $O' \equiv \alpha' \times AB$. Тогда прямоугольные треугольники ANO' и BNO' равны по гипотенузе и (общему) катету $O'N$. Поэтому $AO' \equiv BO'$, т. е. O' совпадает с O, плоскость α' совпадает с плоскостью α, $N \in \alpha$.

2. 2. Φ_1 — плоскость α, Φ_2 — плоскость β.

1) Если $\alpha \parallel \beta$ (рис. 45), то Φ есть «средняя плоскость», т. е. плоскость, параллельная α и β и делящая пополам каждый общий перпендикуляр к плоскостям α и β[1].

2) Если $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \nparallel \beta$, то Φ есть система двух взаимно перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2, делящих пополам двугранные углы, образуемые плоскостями α и β (рис. 46).

2. 3. Φ_1 — прямая a, Φ_2 — прямая b.

1) Если $a \parallel b$, то Φ есть плоскость π, проходящая через «среднюю линию» прямых a и b, перпендикулярно плоскости α, определяемой прямыми a и b (рис. 47)[1].

2) a и b пересекаются (рис. 48).

---

[1] Доказательство отнесем к упражнениям.

В этом случае Ф есть совокупность двух плоскостей π_1 и π_2, проходящих соответственно через биссектрисы углов, образуемых прямыми a и b и перпендикулярных плоскости α, определяемой прямыми a и b[1].

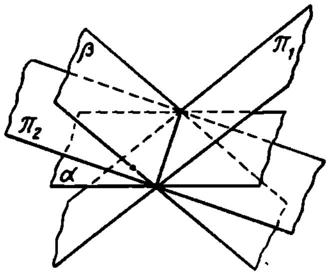


Рис. 46.

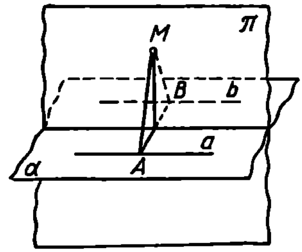


Рис. 47.

3) a и b скрещиваются.

Ф есть седловидная поверхность (гиперболический параболоид), изображенная на рисунке 49.

Указанное здесь характеристическое свойство точек можно принять за определение седловидной поверхности.

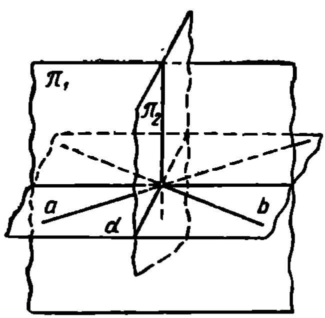


Рис. 48.

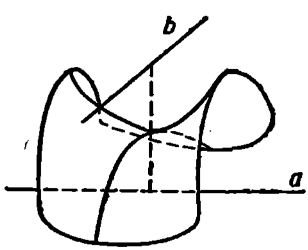


Рис. 49.

2. 4. Φ_1 есть точка A, Φ_2 — точка B, Φ_3 — точка C. Ясно. что искомую фигуру Ф можно рассматривать как пересечение фигуры Ф', состоящей из всех точек, равноудаленных от A и B, и фигуры Ф'', состоящей из всех точек, равноудаленных от B и C.

Исходя из *2. 1*, легко установить, что:

1) если A, B и C не на одной прямой, то Ф есть прямая, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 50);

2) если A, B и C лежат на одной прямой, то искомая фигура Ф не существует.

---

[1] Доказательство отнесем к упражнениям.

2. 5. Φ_1 — плоскость α, Φ_2 — плоскость β, Φ_3 — плоскость γ. Искомую фигуру Φ можно рассматривать как пересечение фигуры Φ', состоящей из всех точек, равноудаленных от α и β, и фигуры Φ'', состоящей из всех точек, равноудаленных от β и γ.

Здесь возможны несколько случаев.

Пусть, например, все три плоскости α, β и γ сходятся в одной точке O (рис. 51).

Обращаясь к *2. 2.* 2), найдем, что Φ есть система четырех прямых g_1, g_2, g_3 и g_4, проходящих через точку O.

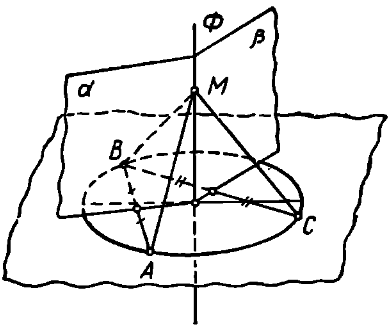


Рис. 50.

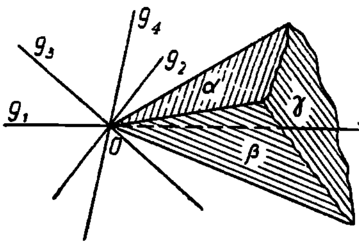


Рис. 51.

Предоставляем читателю сформулировать условия других возможных случаев и назвать в каждом из этих случаев соответствующую фигуру.

5. Уточним теперь смысл задачи нахождения фигуры по характеристическому свойству ее точек и приведем некоторые соображения относительно методики решения этой задачи.

Постановка этой задачи предполагает, что выделена некоторая совокупность «простейших», или «элементарных», фигур, которые считаются уже известными. Перечень этих *известных* фигур является, конечно, условным. В условиях элементарной геометрии естественно отнести к числу элементарных фигур прежде всего следующие: точку, прямую, отрезок прямой, луч, окружность, дугу окружности, плоскость, сферу.

Если какая-либо фигура является пересечением, соединением или разностью двух элементарных фигур, то мы также отнесем ее к числу элементарных фигур; если какая-либо элементарная фигура разбивает плоскость или все пространство на конечное число частей (областей), то каждую такую часть мы также считаем элементарной фигурой. К числу известных фигур относятся поэтому также любая конечная совокупность точек, всякий многоугольник, круг, круговой сегмент, сектор, полоса между параллельными прямыми, полуплоскость, шар и другие фигуры.

Точный смысл задачи о нахождении фигуры по характеристическому свойству ее точек состоит в том, чтобы указать, какую именно элементарную фигуру представляет собой множество точек, заданное этим характеристическим свойством.

Остановимся на методике решения этой задачи.

Решение задачи на нахождение фигуры по характеристическому свойству ее точек можно расчленить на *анализ, доказательство* и *исследование*.

Цель а н а л и з а — прийти к некоторой гипотезе относительно того, чем является искомая фигура. Анализ обычно начинают с того, что на чертеже изображают те фигуры, которые даны по условию, и какую-либо точку, обладающую указанным (характеристическим) свойством. Устанавливают некоторые связи этой точки с данными элементами. Иногда анализу способствует рассмотрение какого-либо частного случая или же построение нескольких точек, принадлежащих искомой фигуре.

В результате анализа мы приходим к п р е д п о л о ж и т е л ь н о м у решению задачи, которое требует еще обоснования, т. е. доказательства.

В ходе д о к а з а т е л ь с т в а устанавливается справедливость двух взаимно обратных предложений: 1) что всякая точка найденной (в анализе) фигуры обладает данным характеристическим свойством и 2) что каждая точка, обладающая указанным характеристическим свойством, принадлежит найденной при анализе фигуре. Полезно иметь в виду, что предложение 2) равносильно следующему предложению 2'): если какая-либо точка не принадлежит найденной фигуре, то она не обладает указанным характеристическим свойством.

И с с л е д о в а н и е заключается в рассмотрении различных случаев, которые могут представиться при решении задачи в зависимости от того или иного выбора данных.

6. Поясним сказанное примерами.

П р и м е р 1. Найдем множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок, расположенный в этой плоскости, виден под данным углом.

А н а л и з. Пусть AB (рис. 52) — данный отрезок, α — данный угол.

Если M — точка искомой фигуры, то $\angle AMB = \alpha$ по условию. В связи с этим условием естественно вспомнить теорему о равенстве вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу (см. [20], ч. I, гл. 2, раздел V, п. 125).

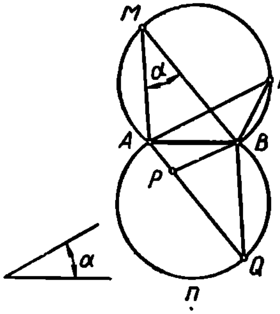


Рис. 52.

Проведем окружность через три точки A, M и B, которые не лежат на одной прямой, если $0 < \alpha < 180°$. Тогда для всякой точки M' дуги AMB этой окружности (кроме точек A и B) $\angle AM'B$ также равен α, т. е. каждая точка этой дуги также принадлежит искомой фигуре.

Кроме того, очевидно, все точки (кроме A и B) дуги AnB, симметричной с дугой AMB относительно прямой AB, обладают тем же свойством и поэтому принадлежат той же фигуре.

Доказательство. Чтобы доказать, что фигура Ф, составленная из двух симметричных дуг окружностей равных радиусов, проходящих через точки A и B, действительно есть искомая фигура, осталось рассмотреть точки, не принадлежащие этой фигуре. Если точка P лежит в области, ограниченной фигурой Ф, то, проведя луч AP (или BP) до встречи с фигурой Ф в точке Q, заметим, что $\angle APB > \angle AQB = \alpha$. Если же избрать точку P вне указанной области, то получим противоположный результат: $\angle APB < \alpha$.

Итак, *множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом, представляет собой соединение двух дуг окружностей с равными радиусами, проходящих через концы данного отрезка и расположенных симметрично по отношению к этому отрезку*. Точки A и B не следует причислять к этому множеству точек, так как при совпадении точки M с каким-либо концом отрезка AB угол AMB становится неопределенным.

Исследование. Если угол α прямой, то фигура Ф обращается в окружность с диаметром AB (без концов этого диаметра). Если угол α равен нулю, то искомая фигура есть разность между прямой AB и отрезком AB. Если угол α равен 180°, то искомая фигура — интервал AB.

Построение фигуры Ф по данному отрезку AB и углу α изложено, например, в [20], ч. I, гл. 2, п. 132.

Пример 2. Найдем геометрическое место середин хорд, отсекаемых данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку; точка и окружность лежат в данной плоскости.

Пусть ω — данная окружность, O — ее центр, A — данная точка (рис. 53).

Пусть P — середина какой-либо из рассматриваемых хорд, именно хорды MN.

Соединим точки P и O. Тогда $PO \perp MN$. Таким образом, отрезок OA виден из точки P под прямым углом. Значит, точка P принадлежит окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре.

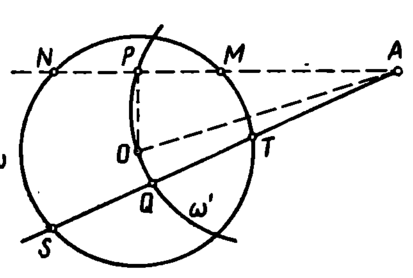


Рис. 53.

Кроме того, точка P должна лежать внутри данной окружности. Мы приходим, таким образом, к следующему предположению: искомой фигурой является расположенная внутри данной окружности ω часть окружности ω', построенной на OA как на диаметре.

Для доказательства верности нашего предположения нужно показать, во-первых, что середина каждой из рассмотренных хорд принадлежит указанной фигуре, во-вторых, что каждая точка Q, принадлежащая указанной части окружности ω', является серединой одной из рассматриваемых хорд. Первое из этих предложений было уже доказано при анализе. Для доказательства второго предложения проведем через Q и A прямую (рис. 53). Она пересечет окружность ω в двух точках, так как Q — внутри окружности. Обозначим эти точки через S и T. $\angle OQA=90°$, как вписанный, опирающийся на диаметр, т. е. $OQ\perp AQ$, значит, Q — середина хорды ST (в силу теоремы: радиус, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам).

Перейдем к исследованию. Если точка A вне окружности ω, то искомая фигура — дуга окружности (с концами), имеющая концы на данной окружности и расположенная внутри нее. Если же A внутри или на данной окружности, но не совпадает с ее центром, то искомая фигура — окружность с диаметром OA. Если A совпадает с центром данной окружности, то искомая фигура — сама точка A.

Пример 3. Найдем множество всех точек плоскости, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек этой плоскости есть величина постоянная.

Пусть $AB=a$. Ищем совокупность всех таких точек M, для которых $AM^2-BM^2=c^2$, где c — данный отрезок.

Найдем сначала точки прямой AB, обладающие данным свойством. Выберем на прямой AB положительное направление от A к B. После этого припишем каждому отрезку этой прямой определенный знак, как это обычно делается. Тогда при любом положении точки M на прямой AB имеет место соотношение:

$$\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}\,[1].$$

По условию

$$\overline{AM}^2-\overline{MB}^2=c^2,$$

т. е.

$$\overline{AM}^2-(a-\overline{AM})^2=c^2$$

$$\overline{AM}=\frac{a^2+c^2}{2a}. \qquad (1)$$

Таким образом, на прямой AB существует, и притом только одна, точка M, принадлежащая искомой фигуре, т. е такая, что

$$AM^2-BM^2=c^2.$$

Положение этой точки определяется формулой (1).

Попытаемся указать другие точки, принадлежащие искомой фигуре. Замечаем, что всякая точка P (рис. 54) на перпендикуляре p

---

[1] Так называемая *теорема Шаля*.

к AB, проходящем через точку M, также обладает указанным свойством. Действительно,

$$AP^2 - BP^2 = (AM^2 + MP^2) - (BM^2 + MP^2) = AM^2 - BM^2 = c^2.$$

Так как при дальнейшем рассмотрении нам не удается обнаружить других точек, обладающих требуемым свойством, то приходим к предположению: искомой фигурой является прямая p, перпендикулярная прямой AB и проходящая через найденную точку M.

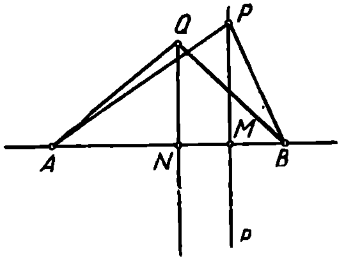


Рис. 54.

Для доказательства справедливости высказанного предположения необходимо установить: 1) что всякая точка P прямой p обладает тем свойством, что $AP^2 - BP^2 = c^2$; это уже установлено в ходе анализа; 2) что точка, не принадлежащая прямой p, не обладает указанным свойством, т. е. для такой точки Q будет $AQ^2 - BQ^2 \neq c^2$.

Проведем через точку Q (рис. 54) прямую QN, перпендикулярную к AB. Тогда

$$AQ^2 - BQ^2 = (AN^2 + NQ^2) - (BN^2 + NQ^2) = AN^2 - BN^2.$$

Так как точка Q не принадлежит прямой p, то точка N отлична от точки M. Но мы уже отметили, что точка M является единственной точкой прямой AB, принадлежащей искомой фигуре.

Следовательно, точка N, также расположенная на прямой AB, не принадлежит этой фигуре. Поэтому $AN^2 - BN^2 \neq c^2$, а, значит,

$$AQ^2 - BQ^2 \neq c^2.$$

Пример 4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Найти множество всех точек, для которых сумма расстояний от прямых AB, BC, CD и AD равна данному отрезку s.

Для каждой точки, лежащей внутри квадрата $ABCD$ или на его стороне, сумма расстояний от прямых AB, BC, CD и AD, очевидно, равна $2a$. Нетрудно проверить, что для всякой точки, расположенной вне квадрата $ABCD$, сумма расстояний от тех же прямых заведомо больше $2a$.

Отсюда следует: 1) если $s=2a$, то искомая фигура состоит из всех внутренних точек квадрата и точек его сторон; 2) если $s<2a$, то искомое множество пусто: на плоскости нет ни одной точки, сумма расстояний которой от прямых AB, BC, CD и AD была бы меньше $2a$.

Остается рассмотреть случай $s>2a$. Пусть $s=2a+2h$.

Для точки M, лежащей в пределах полосы, образуемой прямыми AB и CD, как видно из рисунка 55, сумма расстояний от прямых AB, BC, CD и AD будет $2a+2d$, где d — расстояние точки M от ближайшей к ней из сторон AD и BC. Поэтому искомой фигуре принадлежат те и только те из таких точек M, для которых $d=h$, т. е. точки отрезков A_1D_1 и B_1C_1, отсекающих на продолжениях сторон AB и CD отрезки, равные h. Аналогичное положение имеет место в пределах полосы, образуемой прямыми AD и BC: рассматривая эту область, мы получим отрезки A_2B_2 и C_2D_2, изображенные на рисунке 55.

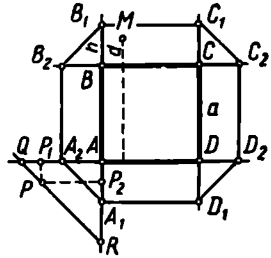


Рис. 55.

Остается найти точки искомой фигуры, расположенные внутри углов A_1AA_2, B_1BB_2, C_1CC_2 и D_1DD_2. Для примера рассмотрим угол A_1AA_2. Пусть P — какая-нибудь точка внутри этого угла, PP_1 и PP_2 — ее расстояния от прямых AD и AB. Проведем через эту точку прямую QR, образующую с прямой AB (следовательно, и с прямой AD) угол в 45°. Тогда

$$PP_1+PP_2=P_2A+RP_2=AR,$$

так что сумма расстояний точки P от четырех данных прямых будет составлять $2a+2AR$. Согласно принятым обозначениям, точка P принадлежит искомой фигуре в том и только в том случае, если $2a+2AR=2a+2h$, т. е. $AR=h$. Таким образом, внутри угла A_1AA_2 искомой фигуре принадлежат точки отрезка A_1A_2 и только они, а вся искомая фигура представляет восьмиугольник $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$.

Интересные примеры отыскания фигур по характеристическому свойству их точек связаны с рассмотрением траекторий движущихся точек.

Пример 5. Равнобедренный прямоугольный треугольник AMB (рис. 56) перемещается по плоскости так, что его вершины A и B

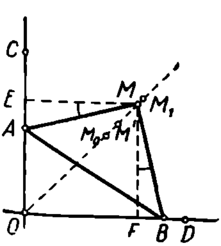


Рис. 56.

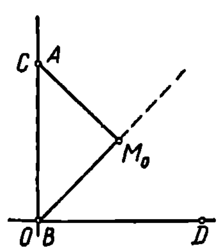


Рис. 57.

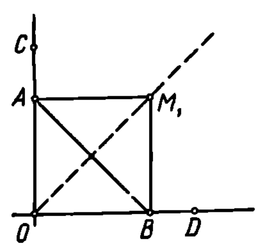


Рис. 58.

скользят по сторонам прямого угла COD. Пусть $CO\equiv OD\equiv AB$, $AM=a$. Какую траекторию опишет точка M, когда точка A опишет отрезок CO?

Пусть M_0 — начальное положение вершины M, т. е. в момент, когда A находится в C (рис. 57). Понятно, что M_0 лежит на биссектрисе угла COD.

В том положеиии треугольника AMB, когда $OA \equiv OB$ (рис. 58), его вершина M также располагается на биссектрисе угла COD в некотором положении M_1.

Пусть теперь треугольник AMB заиимает произвольиое из допустимых его положений (рис. 56).

Опустим из M перпендикуляры ME и MF на OC и OD. Тогда $\angle AME \equiv \angle BMF$, как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Кроме того, $AM \equiv BM$ по условию. Отсюда следует, что $\triangle AME \equiv \triangle BMF$, и поэтому $ME \equiv MF$, так что точка M в произвольном своем положении лежит также на биссектрисе угла COD.

Нетрудио показать, что $OM_0 \leqslant OM \leqslant OM_1$. Действительно,

$$MF \leqslant MB = a, \quad OM = MF\sqrt{2} \leqslant a\sqrt{2} = OM_1,$$

так что

$$OM \leqslant OM_1.$$

И с другой стороны, при любом положении треугольиика AMB (рис. 56) $\angle MOA = 45°$, а $\angle MAO \geqslant \angle MAB = 45°$, так что $\angle MOA \leqslant \angle MAO$, откуда следует, что $AM \leqslant OM$, т. е. $OM \geqslant a$, в то время как $OM_0 = a$.

Итак, доказано, что при любом положении треугольника AMB вершииа его M находится на отрезке M_0M_1.

Обратно, если M' — произвольная точка отрезка M_0M_1, то существует такое положеиие треугольника AMB, при котором вершина M совпадает с точкой M'. Это можно доказать путем построеиия треугольника AMB в соответствующем положении. Это ясно также и из механических соображеиий: точка M, перемещаясь по отрезку M_0M_1, не может перейти из положеиия M_0 в положение M_1, не пройдя через каждое промежуточное положение M'.

Таким образом, отрезок M_0M_1 есть траектория вершииы M подвижного треугольника AMB.

Иитересно заметить, что при перемещеиии точки A из положения C в положение O точка M описывает отрезок M_0M_1 дважды.

7. Приведем иекоторые соображеиия, которые иногда облегчают отыскание пространствеиных фигур по характеристическому свойству их точек.

1) Полезно себе предварительно представить аналогичную фигуру на плоскости. После этого уже легче догадаться, какой должна быть искомая фигура. Для первой ориентировки надо иметь в виду, что часто (далеко не всегда) между аналогичными фигурами на плоскости и в пространстве наблюдается такое соответствие (см. табл. на стр. 51).

2) Часто отыскание фигуры в пространстве полезно свести к поиску аналогичных фигур в каждой плоскости из некоторого семейства плоскостей.

На плоскости	В пространстве
Точка	Прямая
Прямая	Плоскость, цилиндрическая поверхность
Окружность	Сфера, цилиндрическая поверхность

Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример. Найти множество всех точек пространства, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть постоянная величина c^2.

Вспомним, что мы уже решали аналогичную задачу на плоскости. Обозначим через M точку на прямой AB, определяемую формулой (1) из примера 3, п. 6 этого параграфа.

Пусть P — произвольная точка пространства.

Через A, B, P проведем плоскость β. Точка P из плоскости β, как показано в упомянутом примере, тогда и только тогда удовлетворяет условию $AP^2 - BP^2 = c^2$, когда она в плоскости β лежит на прямой MN, проходящей через точку M и перпендикулярной к AB. При повороте плоскости β вокруг прямой AB прямая MN ($MN \perp AB$) «заметет», очевидно, ту плоскость α, которая проходит через точку M и перпендикулярна к прямой AB. Эта плоскость α и будет искомой фигурой.

3) Пусть надо найти множество всех точек пространства, обладающих какими-то двумя свойствами. Может оказаться выгодным сначала найти отдельно множество точек, обладающих первым свойством (это будет какая-то фигура Φ_1), и отдельно множество точек, обладающих вторым свойством (это будет какая-то фигура Φ_2). Обоими свойствами обладают, очевидно, общие точки этих двух фигур и только эти точки; следовательно, искомым множеством точек, обладающих обоими свойствами, является пересечение фигур Φ_1 и Φ_2.

Иногда можно таким же образом свести поиск какой-либо фигуры к поиску пересечения трех или более фигур.

Пример. Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей α_1 и α_2 и в то же время равноудаленных от двух данных точек A и B.

Множество точек, равноудаленных от плоскостей α_1 и α_2, — это некоторая «средняя» плоскость α, а множество точек, равноудаленных от двух точек A и B, — это тоже какая-то плоскость β. Искомой фигурой будет пересечение этих плоскостей α и β:

$$\Phi = \alpha \cap \beta.$$

Φ может оказаться:

прямой (если α и β пересекаются);

плоскостью (если α и β совпадают).

Может оказаться также, что фигуры Ф вовсе не существует (если α и β параллельны).

Второй случай будет иметь место, когда точки A и B симметричны относительно плоскости α; третий — если эти точки A и B лежат на одном перпендикуляре к α, но не равноудалены от α. Если же прямая AB не перпендикулярна к плоскости α, то будет иметь место первый случай.

§ 8. ОКРУЖНОСТЬ И СФЕРА АПОЛЛОНИЯ

1. Рассмотрим следующую задачу: найти множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояний от двух заданных в этой плоскости точек A и B равно данному положительному числу λ $(\lambda \neq 1)$.

На прямой AB существуют две точки, принадлежащие искомому множеству: точка M, делящая отрезок AB в отношении λ внутренним образом (рис. 59), и точка N, делящая отрезок AB в том же отношении внешним образом, так что

$$AM:BM=\lambda, \tag{1}$$

$$AN:BN=\lambda. \tag{2}$$

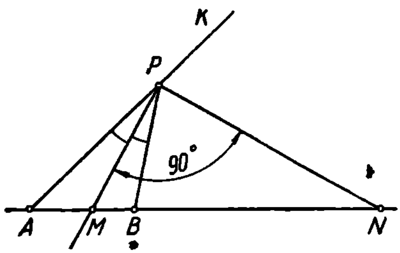


Рис. 59.

Пусть теперь P — произвольная точка искомой фигуры. Тогда

$$AP:BP=\lambda. \tag{3}$$

Соединим P с A, с M, с B и с N. Из соотношений (1) и (3) следует, что $AM:BM=AP:BP$. Значит, отрезок PM, исходящий из вершины P, делит сторону AB треугольника APB внутренним образом на части, пропорциональные боковым сторонам AP и BP. Отсюда можно заключить, что PM — биссектриса угла APB.

Аналогично из соотношений (2) и (3) вытекает, что $AN:BN=$ $=AP:BP$, откуда следует, что PN — биссектриса угла KPB (внешний угол треугольника APB при вершине P). Но биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны, поэтому $\angle MPN=90°$.

Итак, из произвольной точки P (отличной от M и N) искомой фигуры отрезок MN виден под прямым углом. Следовательно, каждая точка, обладающая указанным свойством, расположена на окружности ω, диаметром которой является отрезок MN.

Докажем теперь обратное предложение: каждая точка Q этой окружности ω обладает тем свойством, что $AQ:BQ=\lambda$.

Если точка Q совпадает с точкой M или с точкой N, то предложение справедливо. Пусть Q отлична от M и от N.

Соединим Q с A, с B, с M и с N (рис. 60). Из двух точек A и B одна расположена на отрезке MN, другая вне его. Положим для определенности, что B — внутренняя точка отрезка MN. Проведем через B прямую, параллельную AQ, и отметим точки C и D пересечения ее с прямыми QM и QN. Так как $\triangle BMC \backsim \triangle AMQ$, то $BC:AQ=BM:AM$ или $BC:AQ=1:\lambda$. Так как $\triangle BDN \backsim \triangle AQN$, то $BD:AQ=BN:AN$, т. е. $BD:AQ=1:\lambda$. Значит, $BC\equiv BD$. Иными словами, в треугольнике CDQ отрезок BQ является медианой стороны CD. Но треугольник CDQ прямоугольный (ибо $\angle MQN=90°$, как вписанный, опирающийся на диаметр). Медиана же, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы, т. е. $BQ\equiv BC$. Но раньше было показано, что $BC:AQ=1:\lambda$. Следовательно, $AQ:BQ=\lambda$, что требовалось доказать.

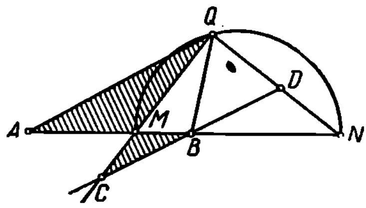


Рис. 60.

Итак, *множество всех точек плоскости, расстояния которых от двух данных точек A и B находятся в данном отношении λ, отличном от нуля и единицы, есть* окружность, концами одного из диаметров которой служат точки, делящие отрезок AB внутренним и внешним образом в данном отношении. Эта окружность называется *окружностью Аполлония*[1].

Если число λ задано в виде отношения двух отрезков m и n, то окружность Аполлония легко может быть построена с помощью циркуля и линейки. Для этого достаточно, очевидно, построить точки M и N, делящие отрезок AB в данном отношении $m:n$ соответственно внутренним и внешним образом. Способ построения ясен из рисунка 61, где $DN \parallel BC$ и $DM \parallel BE$, так что

$$AM:BM=AD:DE=m:n$$
$$\text{и } AN:BN=AD:CD=m:n.$$

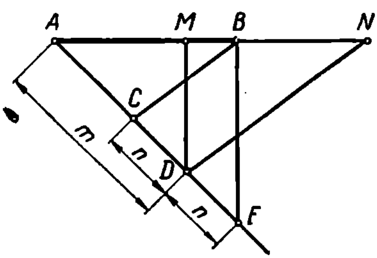


Рис. 61.

Мы предполагали, что $\lambda>0$ и $\lambda\neq 1$. Если $\lambda=0$, то искомая фигура состоит из единственной точки A. Если $\lambda=1$, то искомая фигура — симметраль точек A и B.

2. Нетрудно теперь найти в пространстве множество всех таких точек P, для которых отношение расстояний от двух данных точек A и B постоянно:

$$AP:BP=\lambda(\lambda\neq 1, \lambda>0). \quad (1)$$

Для этой цели рассмотрим плоскость β, проходящую через точки A, B, P. Пусть M и N имеют тот же смысл, что в предыдущем рас-

[1] По имени знаменитого древнегреческого геометра Аполлония Пергского (предположительно 250—170 гг. до н. э.).

суждении. Если точка P удовлетворяет условию (1), то она лежит, в силу предыдущих рассуждений, на окружности с радиусом $\frac{1}{2}MN$ и с центром в середине O отрезка MN, т. е. точка P лежит на сфере $\left(O, \frac{1}{2}MN\right)$. И обратно, если точка P лежит на этой сфере, то она в плоскости β лежит на окружности с диаметром MN и, в силу предыдущих рассуждений об окружности Аполлония, точка P удовлетворяет условию (1).

Итак, *множество всех точек пространства, для которых отношение расстояний от концов отрезка AB равно постоянной* $\lambda (\lambda > 0, \lambda \neq 1)$, *есть* сфера *с диаметром MN*. Эта сфера называется *сферой Аполлония*.

§ 9. РАДИКАЛЬНАЯ ОСЬ И РАДИКАЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1. В некоторых геометрических задачах используется прямая, называемая *радикальной осью* двух окружностей. Понятие радикальной оси связано с понятием *степени точки* относительно окружности.

Пусть на плоскости дана окружность ω и точка M. Проведем через точку M произвольную прямую a, пересекающую окружность ω, и пусть A и A' — точки их пересечения.

Будем рассматривать отрезки $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ как направленные и назовем произведением этих отрезков произведение их длин MA и MA', взятое со знаком «+» или «—» в зависимости от того, направлены ли эти отрезки одинаково или противоположно. Если одна из точек A или A' совпадает с точкой M, то будем считать произведение $\overline{MA}\cdot\overline{MA'}$ равным нулю.

Справедливо следующее предложение.

Если через некоторую фиксированную точку проведены прямые, пересекающие данную окружность, то произведение направленных отрезков, соединяющих данную точку с точками пересечения каждой секущей с окружностью, сохраняет постоянное значение.

Возможны три случая.

1. Точка расположена на данной окружности (рис. 62). В этом случае $\overline{MA}\cdot\overline{MA'}=0$ при любом выборе секущей.

2. Точка M вне окружности (рис. 63). В этом случае отрезки $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ направлены одинаково, $\overline{MA}\cdot\overline{MA'}=MA\cdot MA'=\overline{MT}^2$, т. е. произведение направленных отрезков $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ равно произведению их длин и равно квадрату отрезка касательной MT, проведенной из точки M к данной окружности (см. [19], гл. 3, п. 201).

3. Точка M внутри окружности (рис. 64).

В этом случае отрезки $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ направлены противоположно один другому, и их произведение отрицательное. Известно, что при этом абсолютная величина произведения направленных отрезков $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ равна произведению отрезков диаметра, проведенного через точку M (см. [20], ч. I, п. 200), так что

$$\overline{MA}\cdot\overline{MA'}=-(MA\cdot MA')=-(MP\cdot MQ)=\text{const}.$$

Итак, при любом расположении точки M относительно окружности ω произведение направленных отрезков секущей действительно не зависит от выбора секущей.

Произведение направленных отрезков, проведенных из точки M в точки пересечения окружности ω с любой секущей, проходящей

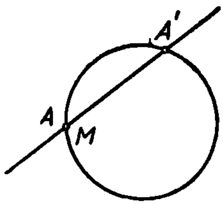


Рис. 62.

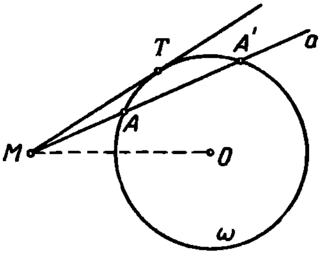


Рис. 63.

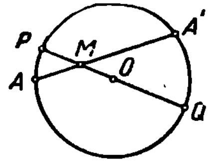


Рис. 64.

через точку M, называется степенью точки M *относительно окружности* ω. Обозначим эту величину символом C_ω^M.

Таким образом, если какая-либо секущая, проходящая через точку M, пересекает окружность ω в точках A и A', то

$$C_\omega^M=\overline{MA}\cdot\overline{MA'}.$$

Ясно (см. п. 2 предыдущего доказательства), что если точка M расположена вне окружности ω, то C_ω^M равна квадрату отрезка касательной, проведенной из точки M к окружности ω.

Докажем, что *при любом выборе точки M на плоскости*

$$C_\omega^M=OM^2-r^2,$$

где r — радиус окружности ω, O — ее центр.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Если точка M — внешняя относительно окружности ω, то (см. рис. 63)

$$C_\omega^M=MT^2=OM^2-OT^2=OM^2-r^2.$$

2. Если точка M расположена на окружности ω, то $OM=r$, и так как, с другой стороны, $C_\omega^M=0$, то, понятно,

$$C_\omega^M=OM^2-r^2.$$

3. В случае внутреннего расположения (см. рис. 64) $\overline{MA}\cdot\overline{MA'}$ равно произведению отрезков MP и MQ диаметра, взятому со знаком минус, так что

$$C_\omega^M=-MP\cdot MQ=-(r-OM)(r+OM)=-(r^2-OM^2)=OM^2-r^2.$$

Формула $C_{\omega}^{M}=OM^2-r^2$ доказана, таким образом, для всех случаев.

Иногда выражение OM^2-r^2 называют *степенью точки относительно окружности* (по определению). Если уменьшать неограниченно радиус r окружности $\omega(O, r)$, не меняя положения ее центра, то в пределе окружность ω превратится в точку O, а степень некоторой точки M относительно окружности ω — в квадрат отрезка OM. Можно рассматривать точку O как окружность нулевого радиуса и ввести следующее определение: *степенью точки M относительно точки O называется квадрат отрезка MO.*

2. Множество всех точек плоскости, имеющих равные степени относительно двух окружностей, лежащих в данной плоскости, называется р а д и к а л ь н о й о с ь ю этих окружностей.

Пусть на плоскости заданы две окружности: $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$. Положим для определенности $r_1 \geqslant r_2$. Найдем множество всех точек M плоскости, для которых $C_{\omega_1}^{M}=C_{\omega_2}^{M}$. Согласно последней формуле это равносильно требованию $O_1M^2-r_1^2=$ $=O_2M^2-r_2^2$, т. е. $O_1M^2-O_2M^2=r_1^2-r_2^2$, так что для точек искомого множества разность квадратов расстояний от центров заданных окружностей остается постоянной.

Такое множество представляет собой, как известно (см. § 7, п. 6, пример 3), прямую, перпендикулярную к линии центров данных окружностей (если только центры O_1 и O_2 не совпадают).

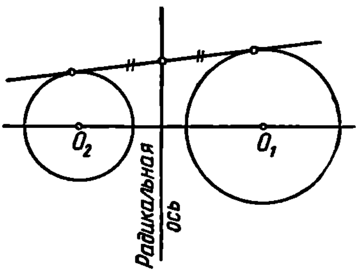


Рис. 65.

Для построения радикальной оси двух окружностей достаточно построить какую-либо одну ее точку: прямая, проведенная через эту точку перпендикулярно линии центров, будет р а д и к а л ь н о й о с ь ю. Если данные окружности обладают общей касательной, то в качестве такой точки можно взять середину отрезка общей касательной между точками касания. Действительно, так как для внешней точки степень ее относительно данной окружности выражается квадратом длины касательной, то середина общей касательной двух данных окружностей имеет равные степени относительно данных окружностей и, следовательно, расположена на их радикальной оси (рис. 65).

Отсюда следует, между прочим, такой факт: *если к двум окружностям можно провести четыре общие касательные, то все четыре середины отрезков общих касательных, заключенных между точками касания, располагаются на одной прямой.*

Если данные окружности пересекаются (рис. 66), то их радикальной осью служит прямая, проведенная через точки их пересечения, так как степень любой точки пересечения относительно каждой из данных окружностей равна нулю.

Если данные окружности касаются друг друга, то радикальной осью служит общая касательная, проведенная в точке касания окружностей (рис. 67).

Построение радикальной оси для случая эксцентрического расположения данных окружностей, т. е. для случая, когда одна из окружностей расположена внутри другой, но центры их не совпадают, мы рассмотрим позже.

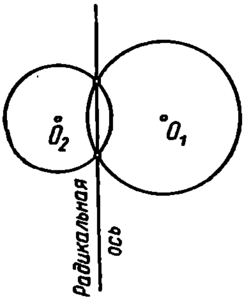


Рис. 66.

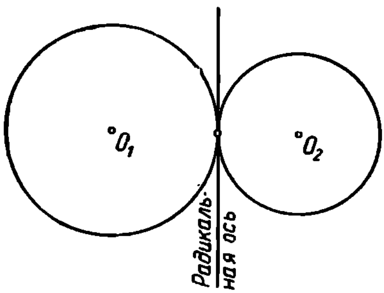


Рис. 67.

Если данные окружности концентрические, то для них радикальная ось не существует, потому что не существует точек, равностепенных относительно таких окружностей: соотношение $OM^2 - r_1^2 = OM^2 - r_2^2$ невозможно при $r_1 \neq r_2$.

Все вышеприведенные рассуждения остаются в силе, если одна из двух данных окружностей ω_1 «вырождается» в точку O_1. Если эта точка внешняя относительно второй окружности ω_2, то радикальная ось проходит через середину отрезка касательной, проведенной из точки O_1 к окружности ω_2.

В дальнейшем под окружностью можно подразумевать также «нулевую окружность», т. е. точку.

К важному понятию радикального центра приводит следующая теорема.

Теорема. *Если центры трех окружностей не лежат на одной прямой, то три радикальные оси этих окружностей, взятых попарно, проходят через одну точку.*

Для доказательства рассмотрим в плоскости три окружности $\omega_1(O_1, r_1)$, $\omega_2(O_2, r_2)$ и $\omega_3(O_3, r_3)$ и предположим, что точки O_1, O_2 и O_3 не принадлежат одной прямой (рис. 68). Радикальная ось a_{12} окружностей ω_1 и ω_2 пересекает радикальную ось a_{13} окружностей ω_1 и ω_3, так как оси a_{12} и a_{13} соответственно перпендикулярны к двум пересекающимся прямым O_1O_2 и O_1O_3.

Пусть $a_{12} \times a_{13} \equiv P$. Так как $P \in a_{12}$, то $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_2}$. Так же $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_3}$. Поэтому $C^P_{\omega_2} = C^P_{\omega_3}$, т. е. точка P имеет равные степени относительно окружностей ω_2 и ω_3 и, следовательно, лежит на прямой a_{23}.

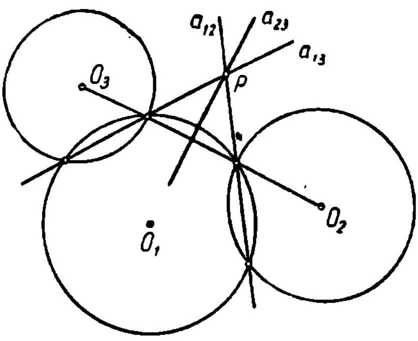


Рис. 68.

Итак, точка P принадлежит всем трем радикальным осям.

3. Общая точка радикальных осей трех окружностей, рассматриваемых попарно, называется *радикальным центром* этих трех окружностей.

Согласно доказанной теореме *для трех окружностей, центры которых не расположены на одной прямой, существует единственный радикальный центр.*

Если центры трех окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 располагаются на одной прямой, то возможны три случая.

1) Ось a_{12} (или a_{13}) не существует (случай, когда хотя бы две из трех окружностей концентричны).

В этом случае не существует и радикальный центр.

2) Оси a_{12} и a_{13} различны. Тогда они параллельны, и радикальный центр опять не существует.

3) Оси a_{12} и a_{13} совпадают. Тогда с ними совпадает также ось a_{23}. Каждая точка общей радикальной оси является радикальным центром трех данных окружностей.

Радикальным центром можно воспользоваться для построения радикальной оси двух данных окружностей, в частности и в том случае, если окружности эти эксцентрические (одна внутри другой, но центры их различны). Пусть надо построить радикальную ось двух окружностей ω_1 (O_1, r_1) и $\omega_2 (O_2, r_2)$ (рис. 69). Строим произвольную окружность ω_3 (O_3, r_3), пересекающую обе окружности ω_1 и ω_2 и имеющую центр O_3 вне прямой O_1O_2. Строим затем радикальный центр P как точку пересечения радикальных осей a_{13} и a_{23}. Через точку P проводим прямую a_{12}, перпендикулярную прямой O_1O_2. Прямая a_{12} является, очевидно, радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2.

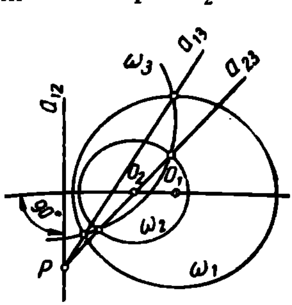


Рис. 69.

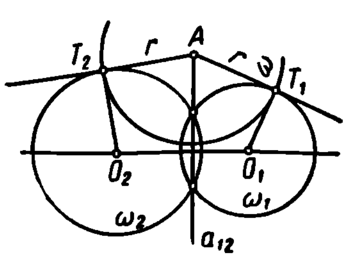


Рис. 70.

4. Укажем одно интересное свойство радикальной оси, полезное при решении некоторых задач на построение.

Теорема. *Внешняя относительно каждой из двух данных окружностей часть их радикальной оси состоит из всех точек, которые служат центрами окружностей, пересекающих обе данные окружности под прямым углом.*

Пусть ω_1 и ω_2 — две данные окружности, a_{12} — их радикальная ось. Выберем на радикальной оси a_{12} любую точку A, внешнюю к данным окружностям. Тогда (рис. 70) отрезки AT_1 и AT_2 касательных, проведенных из точки A к данным окружностям, одинаковы. Пусть $AT_1 \equiv AT_2 = r$. Проведем окружность $\omega(A, r)$. Радиусы O_1T_1 и O_2T_2 данных окружностей перпендикулярны касательным AT_1 и AT_2, так как проведены в точки касания. Поэтому прямые O_1T_1 и O_2T_2 служат касательными к окружности ω в точках ее пересечения с данными окружностями. Таким образом, касательные к окружностям ω и ω_1, проведенные в точке их пересечения T_1, как и касательные к окружностям ω и ω_2, проведенные в точке их пересечения T_2, взаимно перпендикулярны, т. е. окружность ω пересекает каждую из данных окружностей ω_1 и ω_2 под прямым углом.

Обратно, если какая-либо окружность ω пересекает каждую из данных окружностей ω_1 и ω_2 соответственно в точках T_1 и T_2 под прямыми углами, то это означает, что в точке T_1 (соответственно T_2) касательная к окружности ω_1 (соответственно к ω_2) проходит через центр A окружности ω. Таким образом, касательные из точки A к окружностям ω_1 и ω_2 равны, как радиусы окружности ω. Следовательно, точка A принадлежит радикальной оси a_{12}.

5. Теорема. *Если прямая a служит радикальной осью окружностей $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$ и одновременно радикальной осью окружностей ω_1 и $\omega_3(O_3, r_3)$, то прямая a служит радикальной осью окружностей ω_2 и ω_3 и центры всех трех окружностей располагаются на одной прямой.*

Пусть P — произвольная точка прямой a. По условию $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_2}$ и $C^P_{\omega_1} = C^P_{\omega_3}$, откуда следует, что $C^P_{\omega_2} = C^P_{\omega_3}$, так что прямая a сливается с радикальной осью окружностей ω_2 и ω_3.

Точки O_1, O_2 и O_3 на одной прямой, так как $O_1O_2 \perp a$ и $O_1O_3 \perp a$.

Теорема. *Если даны две окружности, обладающие радикальной осью, то через каждую точку плоскости, лежащую вне их радикальной оси, можно провести единственную окружность, имеющую с каждой из данных ту же радикальную ось.*

Доказательство этой теоремы опускаем (оно приведено, например, в [4]).

Согласно предыдущим теоремам каждый раз, когда на плоскости заданы какие-либо две окружности, обладающие радикальной осью a, можно построить в этой плоскости бесконечное множество таких окружностей, что для каждых двух из них прямая a будет служить радикальной осью.

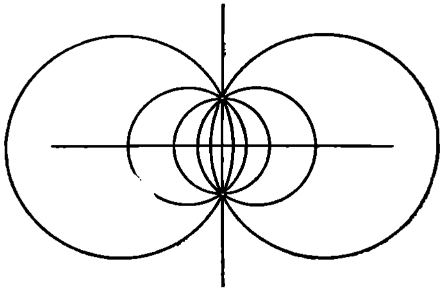


Рис. 71.

Множество всех окружностей, лежащих в данной плоскости и обладающих попарно одной и той же радикальной осью, называется пучком окружностей.

Из предыдущего ясно, что две окружности пучка однозначно определяют этот пучок, т. е. для каждой окружности, расположенной в данной плоскости, можно сказать, принадлежит ли она этому пучку или нет. В зависимости от того, имеют ли окружности пучка две, одну или ни одной общей точки, различают пучки *эллиптические* (рис. 71), *параболические* (рис. 72) и *гиперболические* (рис. 73).

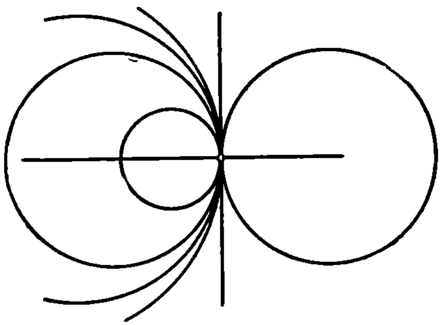


Рис. 72.

Прямая, служащая общей радикальной осью для всех пар окружностей пучка, называется *осью* этого *пучка*. Общая точка всех окружностей параболического или эллиптического пучка называется иногда *центром пучка*.

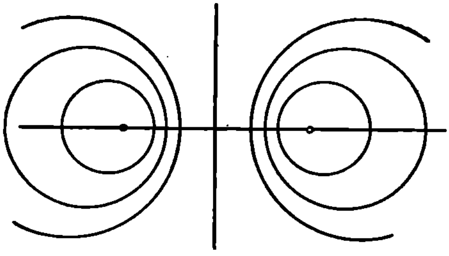


Рис. 73.

С различными видами пучков окружностей можно встретиться в электростатике, картографии и других науках. Приведем два примера.

1) Пусть два длинных прямолинейных однородных провода перпендикулярны к плоскости чертежа и пересекают ее в точках A и B; пусть эти два провода равны по длине, располагаются симметрично относительно плоскости чертежа, заряжены равномерно, несут равные по величине, но противоположные по знаку заряды. Тогда силовые линии возникающего в плоскости чертежа электрического поля будут практически представлять собой эллиптический пучок окружностей, проходящих через A и B.

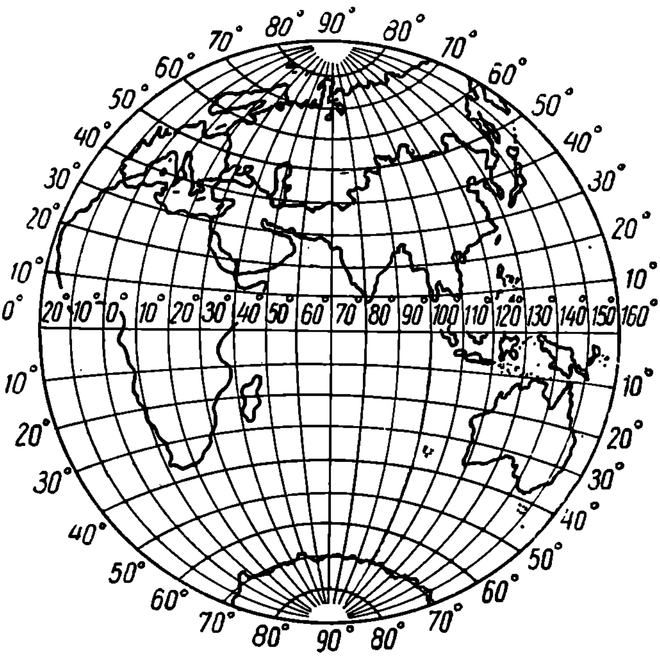


Рис. 74.

Эквипотенциальные линии в плоскости чертежа тоже практически представляют собой пучок окружностей — это будет уже гиперболический пучок; осью пучка будет служить симметраль точек A и B.

Рассмотренные два пучка взаимно ортогональны, т. е. каждая окружность первого пучка пересекает каждую окружность второго пучка под прямым углом.

2) Для построения географических карт полушарий часто используется способ стереографической проекции. Для построения карты полушария по этому способу это полушарие (с земного глобуса) проектируется на плоскость, касающуюся глобуса в некоторой целесообразно выбранной точке A. В качестве центра проекции берется точка B, диаметрально противоположная точке A. Тогда все полушарие изображается в виде круга; меридианы изображаются в виде эллиптического пучка окружностей, проходящих на карте через северный и южный полюсы, а параллели изображаются в виде гиперболического пучка, осью которого служит (на карте) экватор. На рисунке 74 приведено изображение одного полушария по методу стереографической проекции.

7. Аналогично рассмотренным в данном параграфе плоским фигурам вводятся соответствующие фигуры и в пространстве.

Если через данную точку M проводить всевозможные прямые, пересекающие данную сферу, то произведение (направленных) отрезков от точки M до точек пересечения со сферой есть постоянная величина, называемая *степенью* данной *точки M относительно* данной *сферы*. Степень C_{ω}^{M} точки M относительно сферы ω положительна, отрицательна или равна нулю в зависимости от того, лежит ли точка M вне сферы, внутри сферы или на сфере:

$$C_{\omega}^{M} = OM^2 - r^2,$$

где O — центр сферы, r — радиус сферы.

Множество всех точек, имеющих равные степени относительно двух данных сфер, есть плоскость, называемая *радикальной плоскостью* этих двух сфер. Плоскость эта перпендикулярна линии центров данных сфер.

Три радикальные плоскости трех сфер, рассматриваемых попарно (если только центры этих сфер не лежат на одной прямой), проходят через одну прямую — *радикальную ось* трех данных сфер. Радикальная ось трех сфер перпендикулярна плоскости их центров.

Если центры четырех сфер не лежат в одной плоскости, то существует единственная точка, равностепенная относительно всех сфер и называемая *радикальным центром* этих четырех сфер. Через радикальный центр проходят шесть радикальных плоскостей пар данных сфер и четыре радикальные оси троек этих сфер.

Вопросы для повторения

Какие понятия называются первичными? Приведите примеры.

Что называется аксиомой? Приведите примеры аксиом.

Каким образом раскрывается в геометрии содержание первичных понятий?

Что называется теоремой?

Какова силлогистическая форма теоремы?

Сформулируйте в силлогистическом виде известную поговорку: «Дыму без огня не бывает».

Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.

Приведите пример теоремы, истинной вместе с обратной к ней.

Приведите пример теоремы, для которой обратная теорема ложна.

«Если площади двух треугольников не равны, то эти треугольники не равны». Образуйте для этой теоремы предложение, обратное противоположному.

Что за предложения мы будем получать, если для теоремы, обратной к противоположной для некоторой данной теоремы, станем строить обратную, противоположную и противоположную обратной?

Что называется геометрической фигурой? Приведите примеры геометрических фигур.

Что называется соединением нескольких фигур? Приведите примеры.

Что называется пересечением фигур? Приведите примеры, когда пересечение двух фигур есть точка, отрезок, круг.

Что называется разностью двух фигур? Приведите примеры, когда разность двух фигур Φ_1 и Φ_2 совпадает с Φ_1; когда эта разность есть пустое множество.

Какую фигуру называют выпуклой? Приведите пример выпуклой фигуры и пример невыпуклой фигуры.

В каком случае ломаную называют простой?

Как связаны число звеньев и число вершин незамкнутой ломаной; замкнутой ломаной?

Каков точный смысл выражения: «Фигура Ф разбивает пространство на две части»?

Приведите определения понятий: «параллельные плоскости», «параллельные прямые», «скрещивающиеся прямые».

Как надо понимать предложение: «Две параллельные плоскости разбивают пространство на три части»?

Приведите примеры геометрических тел.

Что называется поверхностью?

Проверьте, что сфера, круг, плоскость, полуплоскость подходят под определение поверхности.

Сколько можно провести через данную точку прямых: 1) параллельных данной прямой, 2) параллельных данной плоскости; 3) перпендикулярных данной прямой; 4) перпендикулярных данной плоскости?

Сколько можно провести через данную точку плоскостей: 1) параллельных данной прямой; 2) параллельных данной плоскости; 3) перпендикулярных данной прямой; 4) перпендикулярных данной плоскости?

Верна ли теорема: «Если прямая параллельна какой-либо прямой, расположенной в плоскости, то она параллельна самой плоскости»? (См. [20], ч. 2.)

Можно ли так спроектировать на плоскость острый угол, чтобы его проекцией оказался тупой угол?

Пусть вершина треугольной пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды. Является ли это условие необходимым или достаточным для того, чтобы пирамида была правильной? Рассмотрите аналогичный вопрос для случая окружности, вписанной в основание пирамиды.

Какую фигуру образуют все точки пространства, находящиеся на данном расстоянии от данной: 1) точки; 2) плоскости, 3) прямой, 4) сферы, 5) окружности?

Как располагаются точки пространства, равноудаленные от: 1) двух данных точек; 2) двух данных параллельных плоскостей;

3) двух данных пересекающихся плоскостей; 4) двух данных параллельных прямых; 5) двух данных пересекающихся прямых?

Как располагаются точки пространства, равноудаленные от трех данных точек, не лежащих на одной прямой?

Откуда следует, что множество всех точек пространства, равноудаленных от трех различных точек одной прямой, есть пустое множество?

Чем является множество всех точек пространства, равноудаленных от: 1) трех плоскостей, сходящихся в одной точке; 2) трех параллельных плоскостей; 3) трех плоскостей, из которых две параллельны, а третья их пересекает?

Как вы понимаете задачу: «Найти фигуру, состоящую из всех точек, обладающих указанным свойством»?

Что называется окружностью Аполлония и как она строится?

Что такое сфера Аполлония?

Что называется степенью точки относительно окружности (сферы)?

Какой формулой выражается степень точки относительно окружности (сферы)?

В каких случаях степень точки относительно окружности (сферы): 1) положительна, 2) отрицательна, 3) равна нулю?

Что называется радикальной осью двух окружностей?

В каком случае для двух окружностей не существует радикальной оси?

Что называется радикальным центром трех окружностей?

Всегда ли три окружности имеют единственный радикальный центр?

Что называется пучком окружностей?

Назовите три вида пучков окружностей и укажите, чем они отличаются один от другого.

Что называется радикальной плоскостью двух сфер?

Что называется радикальной осью трех сфер?

Что называется радикальным центром четырех сфер?

Задачи

К § 1

1. Представьте следующие теоремы в силлогистической форме:

1) Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

2) Диагонали прямоугольника равны между собой.

3) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

4) Площадь круга радиуса r равна πr^2.

2. Дана теорема: «Если в треугольнике один угол тупой или прямой, то два других — острые». Образуйте теоремы: обратную, противоположную и обратную противоположной. Установите, истинны эти предложения или ложны.

3. Сделайте то же, что в задачах 1 и 2, для следующих предложений:

1) Около прямоугольника можно описать окружность.

2) В ромб можно вписать окружность.

3) Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, то площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}ab$.

4) Если все три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

5) Если в плоскости прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Останется ли верным последнее предложение, если изъять из его формулировки слова «в плоскости»?

4. Докажите ложность следующих предложений:

1) Если диагонали четырехугольника перпендикулярны между собой, то данный четырехугольник есть ромб.

2) Четырехугольник, один угол которого прямой, а диагонали равны между собой, есть прямоугольник.

3) Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то треугольники эти равны между собой.

К § 2, 3, 4

5. Сколько углов образуют три прямые, проведенные на плоскости через одну точку?

6. На какое наибольшее число частей разбивается плоскость четырьмя прямыми?

7. На сколько областей разбивают сферу четыре равные, лежащие на ней окружности, из которых каждая касается трех других?

8. Какие фигуры могут образоваться в пересечении: 1) двух прямых; 2) плоскости и окружности; 3) плоскости и сферы; 4) двух плоскостей?

9. Пользуясь методом математической индукции, докажите, что n плоскостей, проходящих через одну точку, но не проходящих по 3 через одну прямую, делят пространство на $n(n-1)+2$ частей.

10. На какое наибольшее число областей разбиваются: а) пространство четырьмя плоскостями; б) сфера тремя окружностями; в) пространство четырьмя сферами?

11. Все ребра треугольной пирамиды равны между собой. Какой угол образуют два ее ребра, не имеющие общей точки?

12. В двух смежных гранях куба проведены диагонали, не имеющие общей точки. Под каким углом они наклонены одна к другой?

13. Докажите, что n прямых, проведенных на плоскости, делят плоскость не более чем на 2^n частей.

14. Докажите, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

15. В плоскости даны 4 точки, не лежащие по 3 на одной прямой. Где располагается точка, для которой сумма расстояний от четырех данных точек наименьшая?

16. Докажите: если при пересечении всех сторон четырехугольника с окружностью образуются равные хорды, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны между собой.

К § 6

17. По какому наибольшему числу прямых могут пересекаться четыре различные плоскости?

18. а) Всегда ли пересекаются отрезки, соединяющие противоположные вершины четырехугольника (т. е. его диагонали)? б) Всегда ли пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника (его средние линии)?

19. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и параллельные данной плоскости, лежат в одной плоскости, параллельной данной плоскости.

20. Докажите, что каждая прямая, проведенная через точку данной плоскости параллельно какой-либо прямой, параллельной этой плоскости, лежит в данной плоскости.

21. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проведена плоскость, параллельная другой прямой. Докажите, что эти две плоскости параллельны между собой.

22. Какие фигуры могут образоваться в пересечении поверхности куба с плоскостью?

23. Укажите истинные и ложные среди следующих предложений:

1) Две различные плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.

2) Две различные прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны.

3) Две различные плоскости, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

4) Две различные плоскости, параллельные одной прямой, параллельны.

5) Если одна из двух плоскостей параллельна некоторой прямой, а другая перпендикулярна этой прямой, то эти две плоскости перпендикулярны.

6) Если из двух данных плоскостей одна параллельна, а другая перпендикулярна некоторой третьей плоскости, то данные плоскости взаимно перпендикулярны.

24. Докажите транзитивность параллельности прямых в пространстве.

25. Плоскость считается равноудаленной от нескольких точек, если равны между собой перпендикуляры, опущенные из этих точек на плоскость. Сколько существует плоскостей, равиоудаленных от двух данных точек? Опишите способы образования всех таких плоскостей.

26. Исследуйте, как располагаются плоскости, равноудаленные: 1) от трех данных точек, не лежащих на одной прямой; 2) от четырех точек, не лежащих в одной плоскости.

К § 7—9

27. Найдите фигуру, состоящую из центров всех окружностей, проходящих через две данные точки.

28. Найдите фигуру, состоящую из середин всех отрезков, отсекаемых боковыми сторонами данного треугольника на прямых, проведенных параллельно его основанию.

29. Найдите на плоскости фигуру, состоящую из центров всех окружностей, описанных даниым радиусом r и касающихся данной окружности (O,R).

30. Найдите на плоскости фигуру, состоящую из центров всех окружностей данного радиуса, отсекающих на данной прямой хорды данной длины.

31. Найдите на плоскости фигуру, состоящую из центров всех окружностей данного радиуса, имеющих с данной окружностью общие хорды данной длины.

32. Найдите на плоскости множество всех таких точек, расположенных внутри данного угла AOB, которые вдвое дальше отстоят от стороны OA, чем от стороны OB.

33. Найдите на плоскости множество всех таких точек, расстояния которых от двух данных прямых находятся в данном отношении $m:n$.

34. Найдите на плоскости множество всех точек, делящих внутренним образом (соответственно внешним образом) хорды данной окружности, имеющие данную длину, в данном отношении $m:n$.

35. Найдите в пространстве множество оснований всех перпендикуляров, опущенных из данной точки на прямые, проведениые через другую данную точку.

36. Отрезок данной длины движется так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. Какую линию опишет его середина?

37. Две данные точки A и B лежат на данной окружности (O, r). Пусть M — произвольная точка окружности. На продолжении хорды AM откладывают отрезок MN, равный BM. Какую линию опишет точка N, если точка M описывает окружность (O, r)?

38. Даны окружность (O, r) и ее диаметр AB. На произвольной хорде AM (или на ее продолжении) откладываем отрезок $AN = BM$. Найти множество всех точек N, если точка M описывает окружность.

39. Найдите множество всех точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная. Решите эту задачу на плоскости и в пространстве.

40. Найдите множество всех точек, равноудаленных от трех данных попарно пересекающихся прямых (на плоскости и в пространстве).

41. Найдите на плоскости множество всех центров окружностей данного радиуса, пересекающих данную окружность под прямым углом.

42. Две окружности, лежащие на плоскости, касаются одна другой и касаются данной прямой в двух данных точках A и B. Найдите на плоскости фигуру, образуемую точками касания всех пар окружностей, удовлетворяющих этому условию.

43. Найдите множество всех таких точек плоскости, для которых разность расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному отрезку. Рассмотрите три возможных случая.

44. Найдите фигуру, состоящую из всех таких точек, сумма расстояний которых от сторон данного равностороннего треугольника равна его высоте.

45. Найдите фигуру, состоящую из всех таких точек плоскости, координаты которых относительно некоторой прямоугольной системы удовлетворяют уравнению:

$$1)\ |x| + |y| = 1;$$

$$2)\ \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 2.$$

46. Дан остроугольный треугольник. Найдите фигуру, состоящую из всех центров прямоугольников, вписанных в этот треугольник так, что основания прямоугольников лежат на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника.

47. Чем является множество всех точек плоскости, равноудаленных от сторон данного угла?

48. Найдите фигуру, состоящую из центров всех шаров, касающихся данной прямой в одной и той же точке.

49. Найдите множество центров всех сфер, пересекающих две данные концентрические сферы радиусов R_1 и R_2 по окружностям радиусов соответственно r_1 и r_2.

50. Найдите множество середин всех отрезков, концы которых лежат соответственно на двух данных скрещивающихся прямых.

51. Найдите множество центров всех сфер данного радиуса, касающихся двух данных пересекающихся плоскостей.

52. Через две данные точки проводятся всевозможные окружности, касающиеся данной плоскости. Найдите множество всех точек касания.

53. Найдите фигуру, состоящую из вершин всех прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу c, зная, что разность квадратов их катетов равна квадрату данного числа k.

54. Найдите множество всех точек поверхности куба, удаленных от одной из вершин на расстояние, равное ребру куба.

55. Какую фигуру образует соединение всех прямых, перпендикулярных данной прямой a и отстоящих от нее на данное расстояние m?

56. Какую фигуру образует соединение всех отрезков данной длины d, проходящих через данную точку O и делящихся в ней в отношении 1:2?

57. Найдите соединение всех плоскостей, касающихся данной сферы.

58. Какую фигуру образует соединение всех кругов радиуса r, лежащих в данной плоскости и содержащих данную точку A?

59. Найдите соединение всех прямых, параллельных прямой a и пересекающих прямую b, если: 1) прямые a и b пересекаются; 2) прямые a и b параллельны; 3) прямые a и b скрещиваются.

60. Через две данные параллельные прямые проводят всевозможные пары ортогональных плоскостей. Найдите соединение линий пересечения всех таких пар плоскостей.

61. Между параллельными плоскостями α и β расположена точка O. Найдите соединение всех отрезков, имеющих данную длину, проходящих через точку O и расположенных так, что один конец отрезка принадлежит плоскости α, а другой — плоскости β.

ГЛАВА

II

МНОГОУГОЛЬНИКИ, МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ, МНОГОГРАННИКИ

§ 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Понятие многоугольника вводится в различных школьных учебниках по-разному. Приведем некоторые примеры.

1) «Фигура, образованная замкнутой ломаной линией вместе с частью плоскости, ограниченной этой линией, называется многоугольником» ([20], ч. I, стр. 19).

2) «Часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, называется многоугольником» ([31], стр. 43).

3) «Замкнутая ломаная линия, звенья которой не имеют других общих точек, кроме вершин, и в каждой вершине которой сходятся лишь два ее последовательных звена, называется простым многоугольником» ([12], 1, стр. 92).

Если вдумаемся в эти определения, то обнаружим, что они вызывают ряд вопросов и потому требуют уточнения и разъяснения. Например, вникнем в смысл выражения «часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией». Как следует понимать это выражение? Каков его точный смысл? Следует ли к этой части плоскости отнести и саму ограничивающую ломаную или только ее «внутренность»? Из приведенных выше определений мы видим, что определение 1) предполагает положительный ответ на этот вопрос, определение 2) оставляет этот вопрос открытым, а определение 3) вовсе не связывает понятие многоугольника с какой-то областью плоскости. Почему нельзя, далее, считать «частью плоскости, ограниченной замкнутой ломаной» какую-либо *часть* «внутренности» многоугольника, например область G на рисунке 75 как часть плоскости, ограниченную ломаной $ABCDE$? Правда, представляется более естественным вложить в термин «часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной» другой смысл, понимая под этим фигуру, для которой эта ломаная служит границей, а границу — в том же смысле, что и в гла-

Рис. 75.

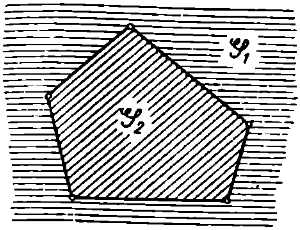


Рис. 76.

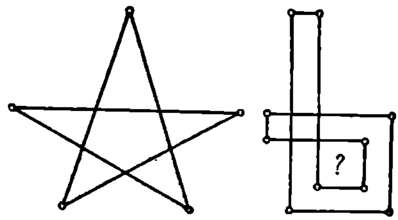


Рис. 77.

ве I этой книги. Но в таком случае и внешняя часть многоугольника (область G_1, на рис. 76) тоже будет частью плоскости, ограниченной той же замкнутой ломаной (т. е. имеющей эту ломаную своей границей). Наконец, если замкнутая ломаная достаточно сложного строения, то не всегда ясно, какую именно часть плоскости следует считать лежащей *внутри* этой ломаной (см., например, рис. 77).

В определении 3) многоугольником называется некоторая *линия*. Но здесь говорится только о «простом» многоугольнике. Что же такое «непростые многоугольники», каковы их свойства?

Мы намерены в этом параграфе выяснить точный смысл понятия «многоугольник» и некоторых других связанных с ним понятий.

Отметим сразу, что в геометрии мы в действительности встречаемся с двумя различными понятиями, обозначаемыми термином «многоугольник»: с многоугольником как некоторой линией и с многоугольником как некоторой областью (или замкнутой областью, пластинкой). Соответственно этому целесообразно ввести два различных понятия: «одномерный многоугольник» и «двумерный многоугольник».

2. В главе I мы уже встречались с понятиями ломаной, замкнутой ломаной и простой ломаной. Будем теперь рассматривать только такие ломаные, все точки которых принадлежат одной и той же плоскости. Их называют *плоскими ломаными*.

Одномерным многоугольником назовем произвольную плоскую замкнутую ломаную. Если эта ломаная простая, то одномерный многоугольник называется *простым*. Непростые одномерные многоугольники называют *звездчатыми*. Часто одномерные многоугольники называют просто *многоугольниками*. Именно такое значение придается термину «многоугольник», когда предлагается «начертить многоугольник». Примеры одномерных многоугольников можно видеть на рисунке 78; из них многоугольники *а* и *б* простые.

Можно указать много других случаев, когда нет надобности связывать понятие многоугольника с какой-либо областью плоскости. Вспомним, например, теорему о сумме сторон описанного четырехугольника или теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

Одномерный многоугольник разбивает плоскость на несколько областей (см. рис. 79). Простые многоугольники обладают свой-

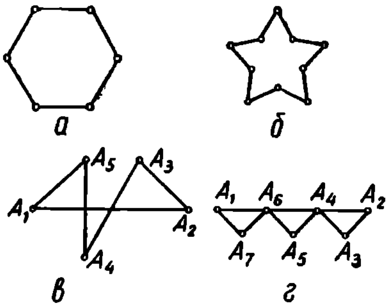


Рис. 78.

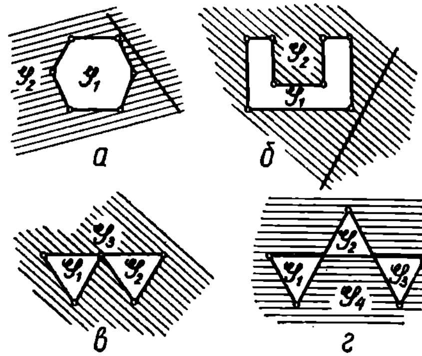


Рис. 79.

ством, которое составляет содержание так называемой *теоремы* Жордана[1]: *Всякий простой одномерный многоугольник разбивает плоскость на две области, из которых одна содержит целиком прямые, а другая этим свойством не обладает* (см. фигуры *а*, *б*

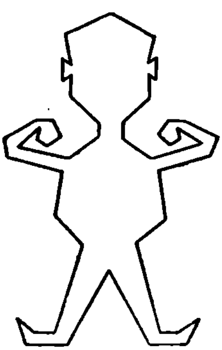


Рис. 80.

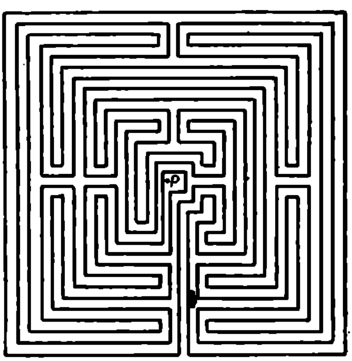


Рис. 81.

на рис. 79). Первая из этих областей называется *внешней областью* для одномерного многоугольника, а вторая — *внутренней областью*. Понятно, что одномерный многоугольник является границей одновременно для каждой из этих областей.

---

[1]Доказательство этой теоремы мы приводить не будем. Его можно найти, например, в (11), стр. 409—418.

Если точка принадлежит внутренней области (по отношению к одномерному многоугольнику), то говорят короче, что она «лежит внутри многоугольника». Аналогичный смысл имеет выражение: «Точка лежит вне многоугольника».

Простой одномерный многоугольник может иметь достаточно сложное строение (см., например, рис. 80). Бывает, что не так просто сказать, лежит ли какая-нибудь выбранная точка P внутри или вне простого многоугольника. Пример такого многоугольника приведен на рисунке 81 (итальянский лабиринт XII столетия). Однако существует несложный прием, который позволяет выяснить, лежит ли точка P внутри простого многоугольника или вне его: если из точки P провести луч, встречающий многоугольник лишь во внутренних точках его сторон, и число точек встречи этого луча с многоугольником нечетное, то точка внутренняя, если четное — то внешняя. Доказательство этого факта мы также опускаем.

Указанный здесь прием может послужить основой для введения понятия внутренней точки любого (не обязательно простого) многоугольника. Пусть P — произвольная точка плоскости, не лежащая на сторонах (одномерного) звездчатого многоугольника. Проведем произвольный луч с началом в точке P, не проходящий через общие точки различных сторон многоугольника. Подсчитаем число точек встречи этого луча со сторонами многоугольника. Оказывается, что либо все такие лучи пересекают многоугольник в нечетном числе точек (см. точку P_1 на рис. 82), либо все эти лучи пересекают многоугольник в четном числе точек (см. точку P_2 на рис. 82). Доказательство этого факта мы приводить не будем. В первом случае будем называть точку P *внутренней точкой* звездчатого многоугольника, во втором случае — *внешней*. Для непростого одномерного многоугольника, изображенного на рисунке 82, внутренними точками будут все точки, лежащие внутри каждого из пяти заштрихованных треугольников.

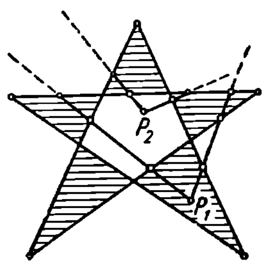


Рис. 82.

3. Как уже отмечалось выше, в термин «многоугольник» вкладывается иногда и иной смысл, отличный от того, который имелся в виду в п. 2.

Будем называть *простым двумерным многоугольником* соединение простого одномерного многоугольника с его внутренней областью. Одномерный многоугольник называется в этом случае *контуром* данного двумерного многоугольника.

Заштрихованные фигуры на рисунке 83 являются *двумерными многоугольниками*, а заштрихованная фигура на рисунке 84 под приведенное здесь определение двумерного многоугольника не подходит.

В дальнейшем, если не будет сделано особой оговорки, термин «многоугольник» употребляется в смысле «двумерный многоугольник».

Обратим здесь внимание на то, что граница многоугольника должна состоять «из одного куска» (обладать свойством связности).

Поэтому пластинка (ограниченная замкнутая область на плоскости), граница которой содержит хотя бы две простые замкнутые ломаные без общих точек, уже не подойдет под определение многоугольника (см. рис. 85). Заметим, что такую фигуру можно всегда разрезать на несколько многоугольников, т. е. ее можно рассматривать как соединение многоугольников без общих внутренних точек.

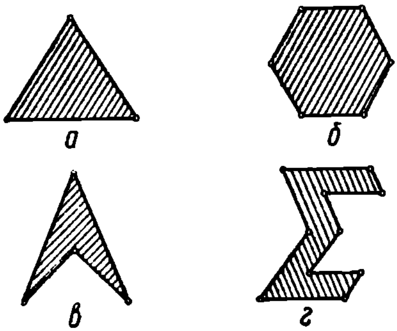


Рис. 83.

Многоугольник (одномерный или двумерный) называется *выпуклым*, если при любом выборе его стороны AB все остальные (т. е. кроме A и B) вершины его лежат по одну сторону от прямой AB.

На рисунке 83 приведены примеры выпуклых (*а* и *б*) и невыпуклых (*в* и *г*) многоугольников.

Можно доказать, что все внутренние точки других (отличных от AB) сторон, а также все точки внутренней области (двумерного) выпуклого многоугольника лежат по ту же сторону от прямой AB, что и вершины выпуклого миогоугольника (мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта). Отсюда будет следовать, что выпуклый многоугольник всегда простой.

Ранее (см. § 2) мы дали определение выпуклой фигуры. Нетрудно проверить справедливость следующего факта: *Выпуклый* (двумерный) *многоугольник является выпуклой фигурой.*

Более подробно: если двумерный многоугольник целиком расположен в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей какую-либо из его сторон, то нз принадлежности к многоугольнику каких-либо точек A и B следует принадлежность к нему всего отрезка AB.

Действительно, выпуклый двумерный n-угольник (рис. 86) является пересечением (общей частью) полуплоскостей Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n (в каждую включается ее граничная прямая). Каждая полуплоскость есть выпуклая фигура: если две точки A и B при-

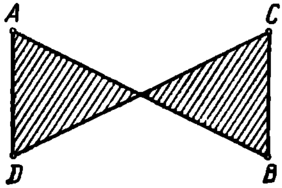


Рис. 84.

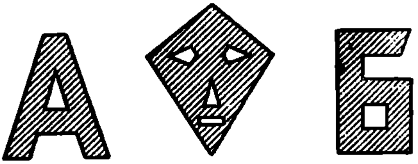
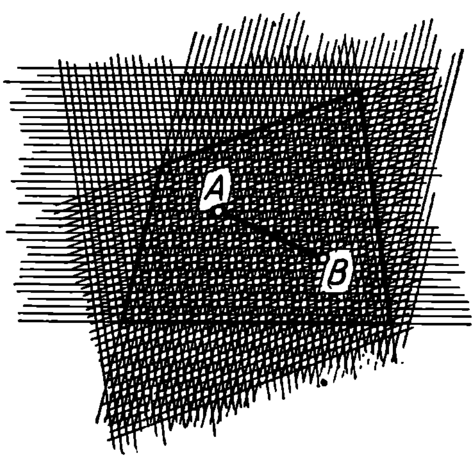


Рис. 85.

надлежат полуплоскости Φ_k, то и отрезок AB принадлежит той же полуплоскости. Но пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой. В самом деле, пусть точки A и B принадлежат пересечению (общей части) выпуклых фигур $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$. Тогда они принадлежат каждой из фигур $\{\Phi_k\}$, а значит, и отрезок AB принадлежит каждой нз этих фигур $\{\Phi_k\}$ и, следовательно, их пересечению.



Рнс. 86.

Итак, из принадлежности двух каких-либо точек A и B многоугольнику следует принадлежность отрезка AB этому многоугольнику, так что последний является выпуклой фигурой.

Заметим здесь, что выпуклый одномерный многоугольник, иапротив, не подходит под определение выпуклой фигуры.

В школьном курсе геометрии обычно ограничиваются рассмотрением только выпуклых многоугольников. В частности, устанавливается теорема: *сумма углов всякого выпуклого n-угольника равна* $2d(n-2)$ (т. е. $n-2$ развернутым углам). Любопытно выяснить, остается ли эта теорема в силе, если простой многоугольник не является выпуклым.

Сначала уточним, что мы должны понимать под углом многоугольника.

В школьном курсе геометрии, когда мы говорим об угле (или — что то же самое — о внутреннем угле) выпуклого многоугольника, мы имеем в виду угол, обладающий следующими свойствами: 1) его вершиной служит вершина многоугольника; 2) его сторонами служат два луча, содержащие те две стороны многоугольника, которые примыкают к этой вершине; 3) угол содержит весь многоугольник.

Указанное здесь определение непригодно в случае невыпуклого простого многоугольника (рис. 87). Два луча (например, AB и AC), исходящие из какой-либо вершины многоугольника (A) и содержащие те две стороны многоугольника, которые примыкают к этой стороне, определяют два угла (дополняющие друг друга до полного угла). Каждый из них можно назвать углом, образованным двумя смежными сторонами многоугольника. Но при этом может оказаться, что ни один из них не содержит всего многоугольника.

Для определения понятия внутреннего угла любого простого (не обязательно выпуклого) многоугольника при вершине A представим себе, что построен некоторый круг с центром в A. Лучи $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 87) разбивают этот круг на два сектора, расположенные соответственно в двух углах, образуемых этими лучами. Если радиус круга выбран достаточно малым (а именно, меньшим всех расстояний от вершины A до других вершин и до других сторон многоугольника, отличных от AB и AC), то один из этих секторов будет целиком лежать внутри многоугольника, а второй — целиком вне его.

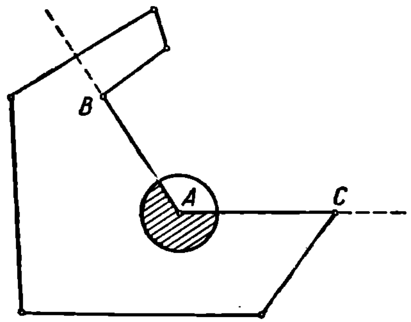


Рис. 87.

Углом многоугольника следует считать тот из двух углов, образованных лучами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, для которого лежащий внутри него сектор упомянутого круга лежит во внутренней области многоугольника.

Итак, (внутренним) *углом многоугольника* при вершине *A следует считать тот из двух углов, образуемых сторонами, исходящими из этой вершины, для которого пересечение внутренней области с достаточно малой окрестностью точки A принадлежит внутренней области многоугольника.*

Заметим теперь, что *каждый простой многоугольник обладает по крайней мере одним внутренним углом, меньшим развернутого угла.* Чтобы убедиться в этом, проведем через каждую вершину многоугольника прямую одного и того же произвольно выбранного направления (но не параллельно ни одной из сторон многоугольника). Ради наглядности будем представлять себе, что эти прямые проводятся горизонтально (рис. 88). Рассмотрим «самую верхнюю» вершину A (если их несколько, то одну из них). Весь многоугольник лежит, очевидно, в одной полуплоскости относи-

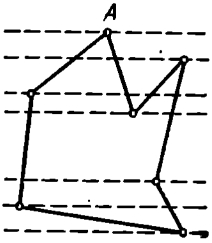


Рис. 88.

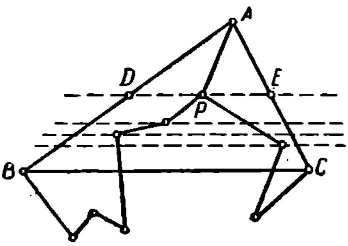


Рис. 89.

тельно проходящей через нее горизонтали, откуда и следует, что внутренний угол при вершине A меньше развернутого.

Вернемся к вопросу о сумме углов простого многоугольника.

Докажем прежде всего, что *каждый простой многоугольник обладает диагональю, делящей его на два простых многоугольника.* С этой целью выберем в многоугольнике такой угол BAC (рис. 89), который меньше развернутого угла. Может случиться, что ни внутри треугольника BAC, ни на его сторонах нет ни одной вершины многоугольника (кроме вершин A, B и C). Тогда BC — искомая диагональ.

В противном случае проведем через каждую вершину многоугольника, попавшую в треугольник BAC (кроме вершины A), параллель к BC (горизонталь). Из этих вершин выберем такую вершину P, которая лежит на самой «высокой» горизонтали (DE). Рассмотрим диагональ AP. Докажем, что она не пересекается с контуром данного многоугольника (в какой-либо внутренней своей точке). Действительно, если бы внутренняя точка M отрезка AP принадлежала контуру многоугольника (рис. 90), то она, очевидно, не могла бы быть вершиной многоугольника. Значит, точка M была бы внутренней точкой некоторой стороны KL. Но тогда из точек K и L по крайней мере одна, например K, лежала бы «выше» DE и, следовательно, вне треугольника DAE. Из этого следовало бы, что отрезок KM (а следовательно, и сторона многоугольника KL) пересекал бы одну из сторон треугольника DAE — сторону AD или сторону AE. Но этого не может быть, так как данный многоугольник простой.

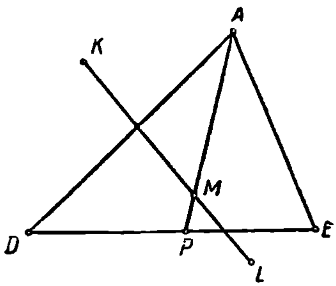


Рис. 90.

Далее, из определения угла многоугольника следует, что часть диагонали AP, лежащая в достаточно малой окрестности точки A, принадлежит внутренней области многоугольника. Но тогда и вся диагональ AP — внутри многоугольника, так как по доказанному она не пересекает контура многоугольника.

Итак, диагональ AP искомая, т. е. она разбивает данный простой многоугольник на два простых многоугольника (с меньшим числом сторон).

Теперь легко убедиться, что сумма углов каждого простого n-угольника равна $2d(n-2)$[1]. Докажем это с помощью метода индукции.

---

[1] Точный смысл этого предложения состоит в том, что возможно так разложить на части все углы многоугольника, чтобы из этих частей можно было поставить $n-2$ развернутых углов.

При $n=3$ предложение справедливо. Пусть оно справедливо при $n \leqslant k-1$. Покажем, что тогда оно будет справедливо и при $n=k$. Для этого разобьем простой k-угольник диагональю на два простых многоугольника. Пусть числа их сторон будут соответственно k_1 и k_2 ($k_1 < k$, $k_2 < k$, $k_1+k_2=k+2$). Тогда суммы их углов согласно индуктивному допущению равны соответственно $2d(k_1-2)$ и $2d(k_2-2)$. А сумма углов исходного многоугольника равна:

$$2d(k_1-2)+2d(k_2-2)=2d(k_1+k_2-4)=2d(k-2),$$

что и требовалось доказать.

§ 11. ПРАВИЛЬНЫЕ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Важным частным видом многоугольников являются правильные многоугольники, т. е. такие, у которых равны между собой все стороны и равны между собой все углы.

Из школьного курса геометрии известны примеры выпуклых правильных многоугольников.

Правильный простой многоугольник всегда выпуклый. В этом можно убедиться, например, следующим образом.

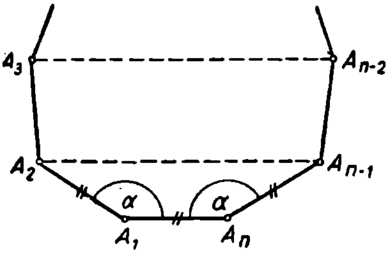


Рис. 91.

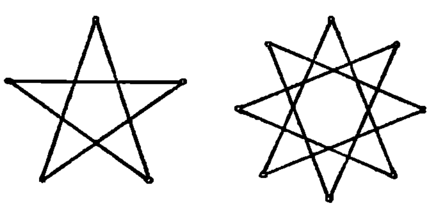


Рис. 92.

Пусть A_1A_n (рис. 91) — сторона правильного простого n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$.

Каждый угол этого многоугольника $\alpha=\frac{2d(n-2)}{n}$. При $n \geqslant 4$ $d \leqslant \alpha < 2d$. Представим себе прямые A_2A_{n-1}, A_3A_{n-2} и т. д.

Легко убедиться, что точки A_2 и A_{n-1} — по одну сторону прямой A_1A_n и $A_2A_{n-1} \parallel A_1A_n$. Простое вычисление показывает, что $\angle A_1A_2A_3 > \angle A_1A_2A_{n-1}$ (также $\angle A_nA_{n-1}A_{n-2} > \angle A_nA_{n-1}A_2$), а это значит, что точки A_3 и A_{n-2} расположены заведомо по ту же сторону от прямой A_1A_n, что и точки A_2, A_{n-1} (выше прямой A_1A_n). Аналогичное рассуждение можно провести и для остальных вершин многоугольника. Детали этого рассуждения мы предоставляем читателю.

Таким образом, простых, но невыпуклых правильных многоугольников не существует. Однако существуют звездчатые (т. е. непростые) одномерные правильные многоугольники. Примеры приведены на рисунке 92.

Только в случае треугольника из равенства сторон следует равенство углов, и наоборот. В общем же случае это не так: при любом $n > 3$ существует такой n-угольник, у которого все стороны равны между собой, а среди углов имеются различные

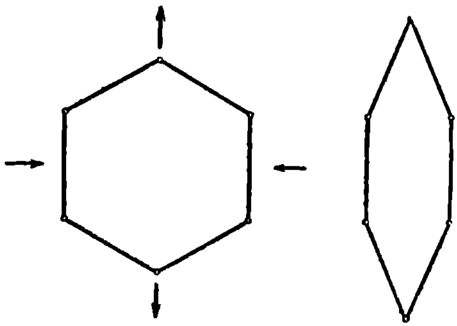


Рис. 93.

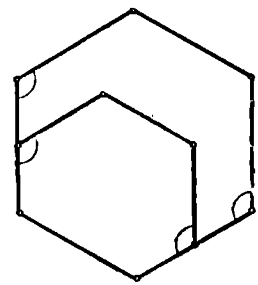


Рис. 94.

(равносторонний многоугольник); и существует n-угольник, у которого все углы равны между собой, а среди сторон имеются неравные (равноугольный многоугольник).

Из рисунка 93 ясно, как можно получить из произвольного правильного шарнирного n-угольника равносторонний, но неправильный многоугольник, а из рисунка 94 видно, как получить из правильного n-угольника равноугольный, но неправильный.

2. Любопытной разновидностью многоугольников являются полуправильные многоугольники.

Неправильный многоугольник, имеющий четное число сторон, называется *равноугольно-полуправильным*, если у него все углы равны, а стороны равны через одну. Простейший пример — прямоугольник. На рисунке 95 изображены равноугольно-полуправильные шестиугольники (выпуклый и звездчатый).

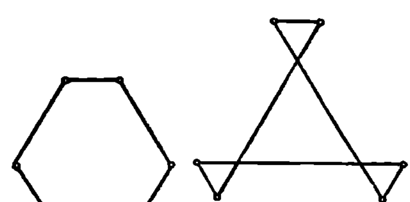


Рис. 95.

Оказывается, что всегда *существует окружность, проходящая через все вершины равноугольно-полуправильного многоугольника*. Ограничимся доказательством этого предложения для выпуклого равноугольно-полуправильного многоугольника. Достаточно убедиться, что центр O окружности, проходящей через какие-либо три последовательные вершины A_k, A_{k+1}, A_{k+2} (рис. 96) многоугольника, и центр O' окружности, проходящей через вершины A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3}, совпадают.

Очевидно, что $\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \triangle A_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}$ (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому равны и радиусы окружностей, описанных около этих треугольников. Центры O и O' лежат поэтому на симметрали отрезка $A_{k+1}A_{k+2}$ на одном и том же расстоянии от этого отрезка (в силу равенства радиусов) и по одну и ту же сторону от прямой $A_{k+1}A_{k+2}$ (в силу выпуклости

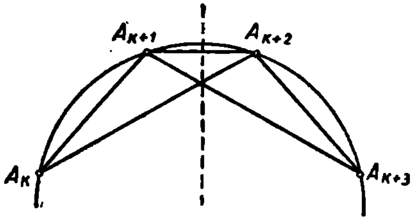


Рис. 96.

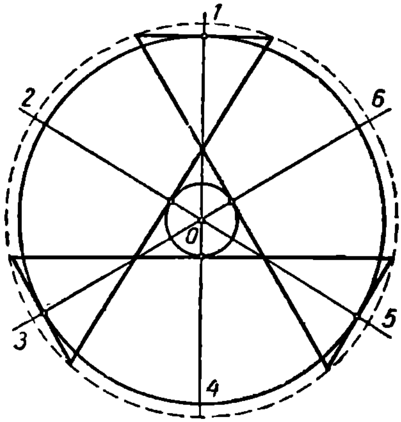


Рис. 97.

многоугольника). Значит, O' совпадает с O, откуда вытекает справедливость теоремы.

Возможно также показать, что *существуют две окружности, из которых каждая касается сторон равноугольно-полуправильного многоугольника через одну.*

Для построения равноугольно-полуправильных многоугольников достаточно: 1) построить две концентрические окружности; 2) провести через их общий центр O лучи, делящие полный угол при точке O на $2n$ равных углов; 3) занумеровать лучи в том порядке, в каком они встречаются при обходе вокруг точки O; 4) отметить точки встречи «нечетных» лучей с первой окружностью, а «четных» — со второй; 5) в полученных точках провести касательные к окружностям. Эти касательные и ограничивают искомый многоугольник (рис. 97).

Существует и другой простой прием («метод среза»), позволяющий при любом натуральном $n\,(n \geqslant 3)$ получить равноугольно-полуправильный выпуклый $2n$-угольник. Отправляются от правильного выпуклого n-угольника. От всех его вершин отсекают равные равнобедренные треугольники (у которых боковые стороны меньше половины стороны данного n-угольника). Пример образования полуправильного равноугольного восьмиугольника из квадрата приведен на рисунке 98.

Неправильный многоугольник, имеющий четное число сторон, называется *равносторонне-полуправильным*, если все его стороны равны, а углы равны через один. Простейший пример такого многоугольника — ромб.

На рисунке 99 изображены простой и звездчатый равносторонне-полуправильные шестиугольники.

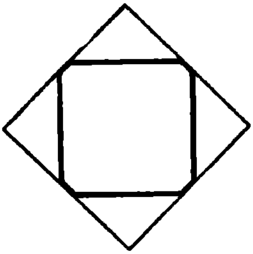


Рис. 98.

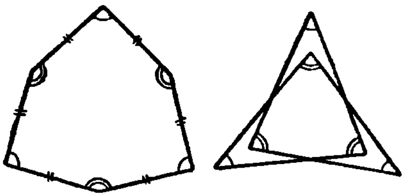


Рис. 99.

Можно показать, что

1) *всегда существует окружность, которая касается всех сторон равносторонне-полуправильного многоугольника;*

2) *существуют две окружности, из которых каждая проходит через вершины такого многоугольника, взятые через одну.*

Нетрудно указать общий прием для построения простых равносторонне-полуправильных $2n$-угольников:

Достаточно (см. рис. 100): 1) построить две концентрические окружности; 2) через их общий центр O провести $2n$ лучей, делящих полный угол при точке O на $2n$ равных частей, и занумеровать эти лучи в порядке их следования при движении вокруг точки O; 3) отметить точки встречи лучей, получивших нечетные номера, с первой окружностью, а лучей с четными номерами — со второй; 4) соединить отрезками полученные точки, лежащие на последовательных лучах. Образовавшийся многоугольник будет равносторонне-полуправильным.

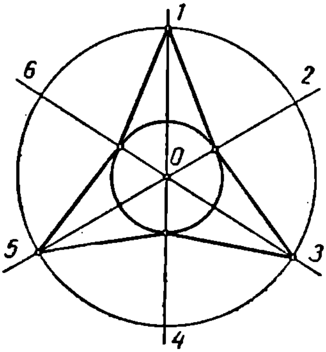


Рис. 100.

Заметим еще, что для построения полуправильного многоугольника можно воспользоваться поворотом какого-либо правильного многоугольника около его центра на произвольный угол, но так, чтобы не произошло самосовмещения. Тогда вершины данного многоугольника и повернутого вместе будут, вообще говоря, вершинами равноугольно-полуправильного многоугольника, а сторонами равносторонне-полуправильного миогоугольника будут части сторон тех же двух многоугольников.

§ 12. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

1. Определение многогранного угла было дано в § 4. Это определение носит весьма общий характер. Даже если потребовать дополнительно в этом определении, например, отсутствия самопересечений у многогранного угла, то под это определение еще будут подходить разнообразные фигуры, нехарактерные для задач элементарной геометрии. Так как упомянутое определение не налагает никаких ограничений на величину плоских углов многогранного угла, то некоторые из плоских углов могут оказаться больше развернутого угла, как это имеет место, например, для фигуры, изображенной на рисунке 101. Под общее определение многогранного угла подойдет также фигура, изображенная на рисунке 102, не имеющая самопересечений, но обладающая весьма причудливой формой.

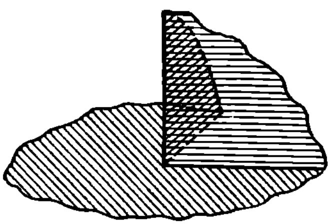


Рис. 101.

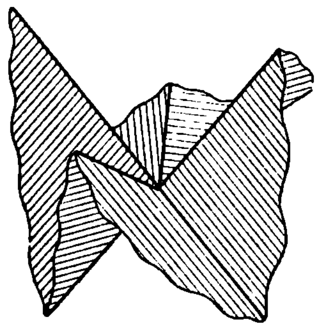


Рис. 102.

Обычно для изучения выделяют тот или иной класс многогранных углов путем присоединения к общему определению многогранного угла тех или иных дополнительных требований. Так, например, Леонард Эйлер (1707—1783) требовал, чтобы каждый плоский угол многогранного угла был меньше развернутого угла.

При решении некоторых вопросов бывает целесообразно ограничиться рассмотрением многогранных углов, обладающих так называемой **опорной плоскостью**. Это — плоскость, проведенная через вершину угла так, что многогранный угол (исключая вершину) располагается от этой плоскости по одну сторону. Ни фигура, изображенная на рисунке 101, ни фигура, изображенная на рисунке 102, опорной плоскостью не обладают. Каждый многогранный угол, обладающий опорной плоскостью, удовлетворяет, как легко проверить, условию Эйлера. Обратное не верно, как показывает, например, фигура, изображенная на рисунке 102.

В термин «многогранный угол» в разных случаях вкладывают различный смысл. Условимся о некоторых такого же рода уточнениях терминологии, как это было сделано выше для многоугольников (вкратце об этом уже было сказано в § 4). Если речь идет только о ребрах многогранного угла, т. е. если многогранный угол как упорядоченное конечное множество лучей, исходящих из одной точки, то будем называть его *одномерным* многогранным углом. Если в ходе рассуждения говорится также и о гранях многогранного угла, т. е. если многогранный угол рассматривается как упорядоченное множество двумерных углов, то естественно употреблять термин *двумерный* многогранный угол. Наконец, в иных случаях удобно понимать многогранный угол как *трехмерную* фигуру. Для этого надо присоединить к двумерному многогранному углу некоторую часть пространства. Это осуществляется следующим образом.

Произвольный (не обязательно простой) многогранный угол разбивает пространство на несколько областей.

Если многогранный угол простой, то он, как уже отмечалось в § 4, разбивает пространство на две области. Если этот многогранный угол обладает опорной плоскостью, то одна из этих областей (G_1) содержит целиком некоторую плоскость, а другая (G_2) не обладает таким свойством. В этом проявляется аналогия с упомянутой в § 10 теоремой Жордана о многоугольнике.

Соединение простого одномерного многогранного угла с каждой из областей, на которые он делит пространство, называется *трехмерным* многогранным углом.

Если данный двумерный многогранный угол ($\mathfrak{M}$) обладает опорной плоскостью (α), то можно указать следующий способ, позволяющий для каждой точки (P) пространства, не принадлежащей многогранному углу, установить, принадлежит она множеству G_1 или множеству G_2.

Проведем через P плоскость β, параллельную α. Допустим, что эта плоскость пересекает $\mathfrak{M}$ по некоторому многоугольнику $\mathfrak{m}$. Если P — внешняя к $\mathfrak{m}$ (см. § 10), то $P \in G_1$. В противном случае $P \in G_2$. Если плоскость β не пересекает $\mathfrak{M}$ (или проходит через его вершину), то $P \in G_1$.

Интересно отметить, что описанный прием, будучи применен к з в е з д ч а т о м у многогранному углу, также позволяет разбить не принадлежащие ему точки пространства на две части и после этого естественным образом ввести понятие трехмерного звездчатого многогранного угла.

В этом параграфе мы ограничиваемся рассмотрением п р о с т ы х многогранных углов, удовлетворяющих упомянутому выше требованию Эйлера.

Определение двугранного угла многогранного угла можно ввести аналогично тому, как вводилось в § 10 понятие угла многоугольника. Рассмотрим какие-либо две последовательные грани простого многогранного угла. Полуплоскости, определяемые этими гранями, образуют два двугранных угла. Необходимо выяснить, какой из этих двугранных углов следует считать двугранным углом данного многогранного угла. Это тот из двух упомянутых здесь двугранных углов, который обладает следующим свойством: в любой окрестности точки, произвольно взятой на ребре этого двугранного угла, содержатся точки, внутренние как для данного многогранного угла, так и для этого двугранного угла.

Многогранный угол называется *правильным*, если все его двугранные углы равны между собой и все плоские его углы равны между собой.

2. Сопоставляя определения одномерного многоугольника и двумерного многогранного угла, легко подметить, что понятие многогранного угла можно рассматривать как пространственный аналог понятия многоугольника. В этой аналогии вершинам многоугольника соответствуют ребра многогранного угла, а углам многоугольника — двугранные углы.

Естественно, что и в свойствах плоских многоугольников и многогранных углов наблюдается далеко идущая аналогия: многие свойства многоугольников можно перенести на многогранные углы, заменяя слово «вершина» словом «ребро», слово «сторона» словами «плоский угол», а слово «угол» словами «двугранный угол». Хорошо известно, например, свойство сторон треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон (но больше их разности). Легко вывести аналогичное свойство трехгранного угла.

Теорема 1. *Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.*

Доказательство. Если все плоские углы трехгранного угла $SABC$ равны между собой, то справедливость этой теоремы очевидна.

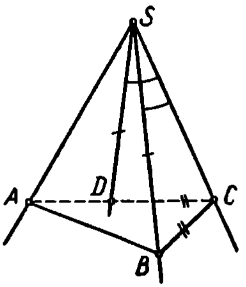


Рис. 103.

Пусть теперь $\angle ASC > \angle BSC$ (рис. 103).

Построим в полуплоскости (CS, A) (т. е. в полуплоскости, определяемой прямой CS и точкой A) угол CSD, равный углу CSB. При этом луч SD пойдет внутри угла CSA. Пусть прямая AC пересекает луч SD в точке D и пусть $SB \equiv SD$. Легко заметить, что при этом $BC \equiv CD$. И так как $AC < AB+BC$, то $AD < AB$.

Сравнивая треугольники ASD и ASB, заметим поэтому, что

$$\angle ASD < \angle ASB.$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства соответственно равные углы CSD и CSB, получим:

$$\angle ASC < \angle ASB + \angle CSB,$$

что и требовалось доказать.

Не следует думать, что аналогия между плоскими многоугольниками и многогранными углами является полной: можно указать ряд свойств плоских многоугольников, которые не переносятся на многогранные углы, и, с другой стороны, можно отметить такие свойства многогранных углов, для которых аналогичное свойство многоугольников не имеет места. Подтвердим эту мысль следующим простейшим примером.

Известно, что сумма углов плоского n-угольника равна $2d(n-2)$, так что сумма эта зависит только от n, а сумма внешних его углов, независимо от n, равна $4d$. Простейшие примеры убеждают нас, что эти факты на многогранные углы не переносятся. Рас-

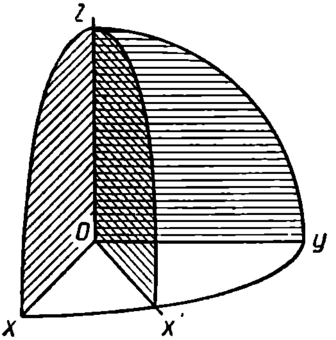


Рис. 104.

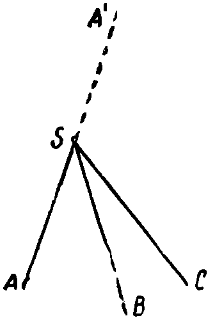


Рис. 105.

смотрим, например, трехгранный угол $Oxyz$, образуемый положительными лучами прямоугольной декартовой системы координат в пространстве (рис. 104). Каждый двугранный его угол прямой, сумма всех двугранных углов равна $3d$, формула для суммы углов $s=2d(n-2)$ не имеет силы. На этом же примере можно видеть, что сумма двугранных углов многогранного угла зависит не только от n: заменив ребро Ox, например, биссектрисой Ox' угла xOy, получим опять трехгранный угол, у которого, однако, два двугранных угла прямые, а третий острый.

В отличие от n-угольника, сумма сторон которого может быть как угодно большой, для многогранных углов имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла всегда меньше* 360°.

Рассмотрим сначала трехгранный угол $SABC$ (рис. 105). Пусть $\overline{SA'}$ — луч, дополнительный к $\overline{SA}$. Согласно предыдущей теореме (в применении к трехгранному углу $SA'BC$):

$$\angle BSC < \angle BSA' + \angle CSA',$$

т. е.

$$\angle BSC < (2d - \angle BSA) + (2d - \angle CSA),$$

откуда непосредственно следует, что

$$\angle BSC + \angle BSA + \angle CSA < 4d.$$

Это заключение легко распространить последовательно на четырехгранный, пятигранный и вообще n-гранный выпуклый угол. Рассмотрим выпуклый многогранный угол $SA_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 106).

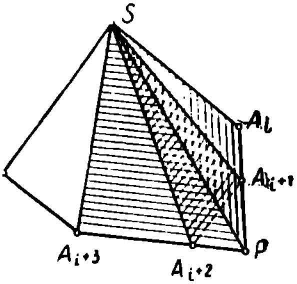


Рис. 106.

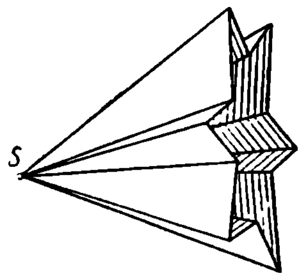


Рис. 107.

Выберем две его грани SA_iA_{i+1} и $SA_{i+2}A_{i+3}$, расположенные «через одну». Пусть $\overline{SP}$ — тот из лучей линии их пересечения, который расположен с данным многогранным углом по разные стороны плоскости $SA_{i+1}A_{i+2}$.

Так как

$$\angle A_{i+1}SA_{i+2} < \angle A_{i+1}SP + \angle A_{i+2}SP,$$

то сумма плоских углов данного многогранного угла меньше суммы плоских углов $(n-1)$-гранного угла $SA_1 \ldots A_iPA_{i+3} \ldots A_n$. Если $n-1=3$, то теорема уже доказана. Если же $n>4$, то к полученному $(n-1)$-гранному углу можно применить такое же построение, причем число его граней опять уменьшится на единицу, а сумма плоских углов увеличится. После конечного числа таких построений получим трехгранный угол, для которого справедливость теоремы уже установлена[1].

Отметим, что требование выпуклости многогранного угла является существенным для справедливости данного предложения. Рисунок 107 наглядно показывает, что *сумма плоских углов невыпуклого многогранного угла может быть сколь угодно большой.*

Полная аналогия свойств осуществляется, если сопоставлять многогранные углы не с плоскими, а со «сферическими» многоугольниками, образуемыми в пересечении граней многогранного

[1] Заметим, что приведенное здесь доказательство в отличие от принятого в школьном преподавании не опирается на теорию параллельных, т. е. носит «абсолютный» характер.

угла со сферой, описанной из его вершины (рис. 108). Наличие такой аналогии легко объяснить, заметив, что (при $R=1$) каждая сторона (например, AB) сферического многоугольника численно равна соответственному плоскому углу (a, b) многогранного угла, а каждый угол (например, α) сферического многоугольника численно равен соответственному двугранному углу между гранями AOB и AOD, так как он измеряется углом $B'AD'$ между касательными к сторонам сферического многоугольника в их общей вершине A.

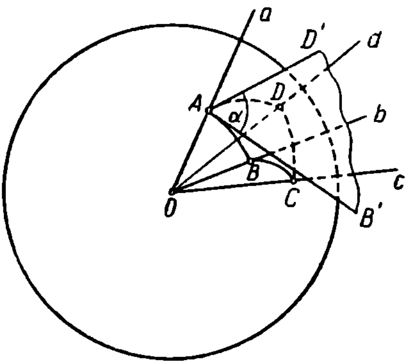


Рис. 108.

3. К выводу важнейших свойств трехгранных углов часто привлекается понятие пополнительного трехгранного угла. Трехгранный угол $SA'B'C'$ называется *пополнительным* к ТУ[1] $SABC$, если: луч SA' (соответственно SB', SC') перпендикулярен плоскости SBC (соответственно SAC, SAB) и расположен по ту же ее сторону, что и луч $\overline{SA}$ (соответственно $\overline{SB}$, $\overline{SC}$).

Отметим следующие важнейшие свойства трехгранных углов и пополнительных к ним:

1) Если $SA'B'C'$ — пополнительный угол к ТУ $SABC$, то $SABC$ — пополнительный угол к ТУ $SA'B'C'$ (свойство взаимности).

2) Каждый плоский угол ТУ дает вместе с плоским углом соответственного (т. е. такого, ребро которого перпендикулярно к плоскости данного угла) двугранного угла пополнительного ТУ развернутый угол.

3) Если два ТУ равны между собой[2], то и пополнительные к ним углы равны между собой.

Доказательство этих свойств отнесем к упражнениям.

Теорема 3. *Сумма двугранных углов трехгранного угла всегда больше $2d$, но меньше $6d$.*

Доказательство. Пусть α, β, γ — двугранные углы данного трехгранного угла; α', β', γ' — соответственные плоские углы пополнительного ТУ. Тогда по свойству 2)

$$\alpha'=2d-\alpha,\quad \beta'=2d-\beta,\quad \gamma'=2d-\gamma,$$

---

[1] Вместо слов «трехгранный угол» позволим себе иногда для краткости писать ТУ.

[2] Здесь и в дальнейшем равенство фигур понимается как возможность их совмещении (см. § 42).

а по теореме 2

$$0 < \alpha'+\beta'+\gamma' < 4d.$$

Таким образом,

$$0 < 2d-\alpha+2d-\beta+2d-\gamma < 4d,$$

откуда непосредственно следует:

$$2d < \alpha+\beta+\gamma < 6d,$$

что и требовалось доказать.

В дополнение к этой теореме заметим, что сумма двугранных углов трехгранного угла может быть как угодно близкой к $6d$. Действительно, если представить себе, например, что вершина S

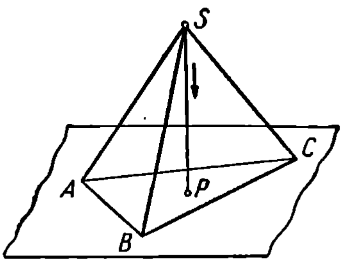


Рис. 109.

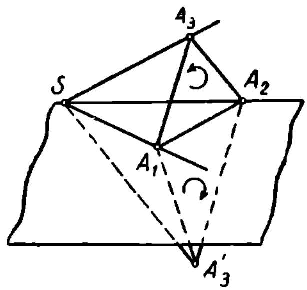


Рис. 110.

(рис. 109) треугольной пирамиды $SABC$ движется по высоте SP этой пирамиды, неограниченно приближаясь к плоскости основания, то станет ясно, что при этом каждый двугранный угол трехгранного угла $SABC$, возрастая, будет неограниченно приближаться к развернутому углу.

Пусть на ребрах ТУ выбраны соответственно три точки: A_1, A_2 и A_3. Если из вершины ТУ обход треугольника $A_1A_2A_3$ представляется происходящим по часовой стрелке, то будем говорить, что данный ТУ имеет *правую ориентацию* (угол $SA_1A_2A_3$ на рис. 110). Если же из вершины S обход треугольника $A_1A_2A_3'$ представляется происходящим против часовой стрелки (угол $SA_1A_2A_3'$ на рис. 110), то говорят, что ТУ имеет левую ориентацию [1].

Для дальнейшего полезно заметить следующее: если вершина S и два ребра SA_1 и SA_2 ТУ фиксированы, а третье ребро SA_3 изменяет свое положение в пространстве, то ориентация ТУ изменяется тогда и только тогда, когда луч $\overline{SA_3}$ переходит из одного полупространства относительно плоскости A_1SA_2 в другое.

---

[1] Введенное здесь в наглядной форме понятие ориентации может быть строго выражено в математических терминах (см., например, [28], § 6).

Будем рассматривать два ориентированных трехгранных угла $SA_1A_2A_3$ и $S'A_1'A_2'A_3'$, называя *соответственными* те их элементы, которые отмечены одинаковыми номерами. Тогда имеет место следующая теорема, выражающая признаки равенства одинаково ориентированных ТУ.

Теорема 4. *Два одинаково ориентированных ТУ равны между собой в каждом из следующих случаев:*

1. Если плоский угол одного ТУ равен соответственному плоскому углу другого ТУ и соответственно равны двугранные углы, ребрами которых служат стороны равных плоских углов.

2. Если двугранный угол одного ТУ равен соответственно двугранному углу другого ТУ и соответственно равны плоские углы, плоскости которых служат гранями равных двугранных углов.

3. Если плоские углы одного ТУ соответственно равны плоским углам другого ТУ.

4. Если двугранные углы одного ТУ соответственно равны двугранным углам другого ТУ.

Заметим, что первые три признака аналогичны соответствующим признакам равенства треугольников.

Первые два из этих признаков легко доказываются обычным способом совмещения (наложения).

Доказательства третьего и четвертого признаков носят косвенный характер. Наметим идею этих доказательств.

Третий признак. Совместим плоский угол A_1SA_2 одного ТУ с равным ему плоским углом $A_1'S'A_2'$ другого ТУ. Лучи SA_3 и SA_3' расположатся, в силу одинаковой ориентации данных ТУ, по одну сторону плоскости SA_1A_2. Допустим, что эти лучи не совместились (рис. 111). Из того, что

$$\angle A_1SA_3 = \angle A_1'S'A_3',$$

легко вывести, что луч SA_1 лежит в плоскости, проведенной через биссектрису угла A_3SA_3' перпендикулярно плоскости A_3SA_3'. А из того, что

$$\angle A_2SA_3 = \angle A_2'SA_3',$$

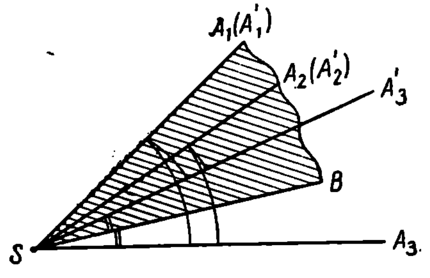


Рис. 111.

следует, что луч SA_2 лежит в той же плоскости. Таким образом, плоскость A_1SA_2 проходит через биссектрису SB угла A_3SA_3'. Но это означает, что лучи SA_3 и SA_3' лежат по разные стороны плоскости SA_1A_2, что не может иметь места при условии одинаковой ориентации ТУ $SA_1A_2A_3$ и $S'A_1'A_2'A_3'$.

Четвертый признак. Если соответственно равны двугранные углы двух одинаково ориентированных ТУ, то по свойству 2) пополнительных ТУ соответственно равны плоские углы пополнительных ТУ. Значит, пополнительные ТУ равны по третьему признаку. А следовательно, равны и данные ТУ по свойствам 1) и 3) пополнительных углов.

§ 13. ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И МНОГОГРАННИКА

1. В школьном курсе геометрии мы неоднократно встречаемся с поверхностями, составленными из многоугольников, или многогранными поверхностями. К таким поверхностям относятся, например, поверхность пирамиды, ее боковая поверхность и ее плоская развертка; двумерный многоугольник тоже считают многогранной поверхностью. Говоря о многогранной поверхности, всегда предполагают, что она обладает связностью, а также что она состоит из конечного числа многоугольников. Эти представления о многогранной поверхности выражаются следующим определением.

Многогранной поверхностью *называется соединение конечного числа* (двумерных) *многоугольников, что для любых двух вершин этих многоугольников существует такая ломаная, составленная из сторон многоугольников этой совокупности, для которой эти вершины служат концами.*

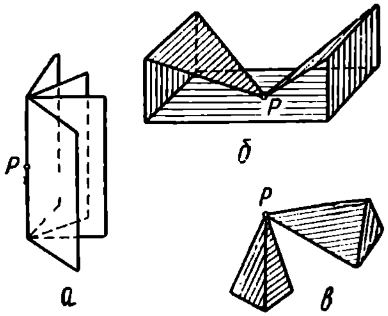


Рис. 112.

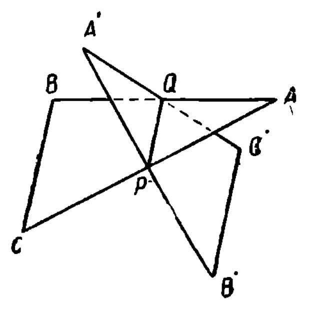


Рис. 113.

На рисунке 112 приведены примеры многогранных поверхностей.

Примерами фигур, составленных из многоугольников и не подходящих под определение многогранной поверхности, могут служить: а) множество всех равных многоугольников, имеющих одну общую сторону (нарушено требование конечности); б) совокупность двух многоугольников без общих точек (нарушено требование связности); в) совокупность двух треугольников, не лежащих в одной плоскости и имеющих общую среднюю линию (рис. 113): здесь не существует ломаной, соединяющей, например, вершины A и A' и составленной из сторон данных треугольников, хотя и можно связать точки A и A' ломаной, образованной из частей сторон этих треугольников.

Многоугольники, составляющие многогранную поверхность, называются ее **гранями**, их стороны — ее **ребрами** и их вершины — **вершинами** многогранной поверхности.

Определенный здесь класс многогранных поверхностей весьма широк, и оказывается полезным выделить из него более узкий класс поверхностей, которые называют простыми многогранными поверхностями.

2. На практике, говоря о многогранной поверхности, обычно имеют в виду, что у нее есть еще одна особенность, а именно, подразумевается, что многогранная поверхность не имеет точек самопересечения и самоприкосновения, т. е. что каждый достаточно малый кусок поверхности можно «распрямить», «разгладить», непрерывно деформировать в кусок плоскости.

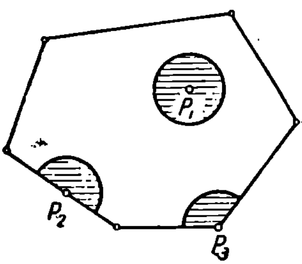


Рис. 114.

Чтобы лучше уяснить это свойство, рассмотрим сначала частный случай многогранной поверхности — один (двумерный) многоугольник. Возьмем произвольную точку P, принадлежащую этому многоугольнику, и рассмотрим множество M всех точек многоугольника, принадлежащих достаточно малому шару с центром в точке P. Если P — внутри многоугольника (точка P_1 на рис. 114), то M — плоский кружок; если P — внутренняя точка какой-либо стороны (точка P_2 на рис. 114), то M — полукруг; наконец, если P — вершина (P_3 на рис. 114), то M — круговой сектор. Будем представлять себе многоугольник резиновым. Тогда в каждом из этих случаев множество M либо есть круг, либо его можно деформировать в круг.

Говоря о многогранных поверхностях, не имеющих точек самопересечения (или самоприкосновения), обычно имеют в виду сходную картину: если взять произвольную точку P на многогранной поверхности и рассмотреть множество M всех точек поверхности, которые принадлежат достаточно малому шару с центром в точке P, то это множество M должно быть таким, чтобы его можно было непрерывно (без разрывов и склеивания) деформировать в кружок. Многогранные поверхности, удовлетворяющие такому условию, называют *простыми*.

Но понятие непрерывной деформации поверхности само требует математического определения. В интересующем нас случае эту трудность можно обойти. Когда речь идет о многогранных поверхностях, проще непосредственно перечислить и исключить все случаи самопересечения. Изложим этот подход к определению простой многогранной поверхности.

Точку P многогранной поверхности будем называть *простой* в каждом из следующих случаев:

1) если она принадлежит только одной грани поверхности;

2) если она принадлежит общему ребру двух и только двух граней;

3) если она служит общей вершиной всех содержащих ее граней и эти грани образуют один и только один двугранный или простой многогранный угол.

Если точка многогранной поверхности не удовлетворяет ни одному из этих требований, то будем называть ее *непростой точкой* или *точкой самопересечения поверхности*. Таковы точки P на рисунке 112, точка S на рисунке 115.

Многогранная поверхность, все точки которой простые, называется *простой многогранной поверхностью*.

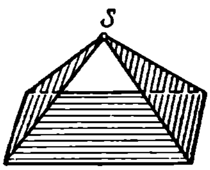


Рис. 115.

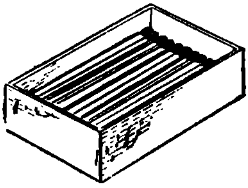


Рис. 116.

В дальнейшем, говоря о многогранной поверхности, будем иметь в виду простую многогранную поверхность.

Выделим какое-либо ребро простой многогранной поверхности. Оно не может принадлежать трем граням, ибо тогда его внутренние точки не были бы простыми. Следовательно, каждое ребро простой многогранной поверхности может принадлежать либо только двум граням, либо только одной грани этой поверхности. Ребро, общее для двух граней многогранной поверхности, называется *внутренним*. Если ребро (кроме, возможно, его концов) принадлежит лишь одной грани, то оно называется *граничным*. Соединение всех граничных ребер называется *краем* или *границей поверхности*.

Если многогранная поверхность имеет граничные ребра, то она называется *незамкнутой поверхностью* или *поверхностью с краем*.

Спичечная коробка без крышки (рис. 116) — пример простой многогранной поверхности с краем; краем ее служит прямоугольник. Крышка спичечной коробки (рис. 117) тоже простая многогранная поверхность с краем; ее край состоит из двух прямоугольников.

Многогранная поверхность, все ребра которой внутренние, называется (двумерным) *многогранником*.

Знакомой моделью простого двумерного многогранника может служить спичечная коробка вместе с ее крышкой (рис. 118).

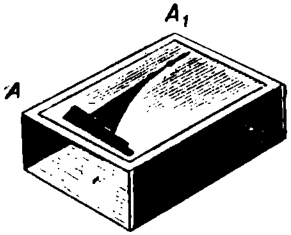


Рис. 117.

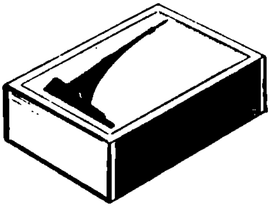


Рис. 118.

Другие примеры простых многогранников изображены на рисунках 119 и 120.

Заметим, что две грани простого многогранника могут иметь и несколько общих сторон (см. рис. 120, где грани $ABCKLMND$ и $EFCKQPND$ имеют общие ребра CK и DN).

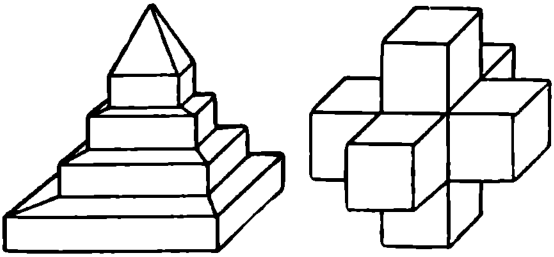


Рис. 119.

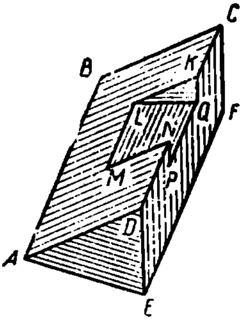


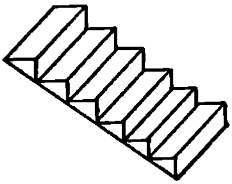
Рис. 120.

Примеры непростых многогранников приведены на рисунке 112,*в* и на рисунке 121. На рисунке 121,*б* изображен куб, из которого вынуты две равные четырехугольные пирамиды, имеющие своими основаниями две противоположные грани куба, а своей вершиной — точку пересечения диагоналей куба.

3. Класс простых двумерных многогранников во многом аналогичен классу простых одномерных многоугольников.

В частности, для простых двумерных многогранников имеет место т е о р е м а, аналогичная теореме Жордана для простых одномерных многоугольников: *Всякий простой двумерный много-*

гранник разбивает пространство на две области, из которых одна содержит целиком некоторые плоскости, а другая этим свойством не обладает. Первая из этих областей называется *внешней* областью для двумерного многогранника, вторая *внутренней*.


а

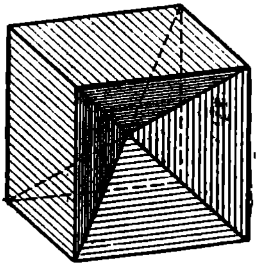

б

Рис. 121.

Двумерный простой многогранник вместе с его внутренней областью называют *трехмерным* простым многогранником или просто многогранником.

Известными примерами простых трехмерных многогранников являются призмы, пирамиды, усеченные пирамиды.

Важный класс простых многогранников — это выпуклые многогранники. По своему определению и свойствам они аналогичны выпуклым многоугольникам. Простой многогранник (двумерный или трехмерный) называется *выпуклым*, если при любом выборе его граней все его вершины (кроме вершин выбранной грани) расположены по одну и ту же сторону от плоскости, содержащей данную грань.

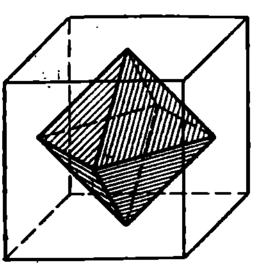


Рис. 122.

Рассуждая, как в случае многоугольников, легко показать, что всякий выпуклый трехмерный многогранник является выпуклой фигурой (т. е. из того, что ему принадлежат какие-либо две точки, следует, что ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий эти точки). Доказательство предлагаем провести читателю.

Понятно, что выпуклый двумерный многогранник выпуклой фигурой не является.

Заметим теперь, что не всякое тело, ограниченное плоскими многоугольниками, подходит под определение простого многогранника. Это может произойти по разным причинам, например: а) граница тела не обладает свойством связности (состоит из нескольких изолированных двумерных многогранников); такое тело образуется, в частности, если из куба вынуть какой-либо лежащий целиком внутри него многогранник (например, другой куб); б) граничная многогранная поверхность имеет непростые точки; такое тело можно, в частности, получить, если из куба вынуть многогранник, вершины которого лежат на поверхности этого куба (рис. 122).

§ 14. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ ВИДОВ МНОГОГРАННИКОВ

1. Многогранники, изучаемые в школьном курсе геометрии, допускают различные определения. В практике школьного преподавания учителю нередко приходится слышать ошибочные определения этих понятий. Неточности в определениях допускаются не только учащимися, но и авторами некоторых учебных и методических пособий.

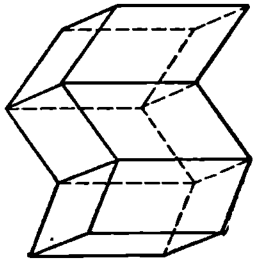


Рис. 123.

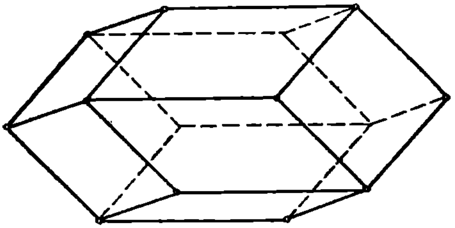


Рис. 124.

Обратимся к определениям простейших видов многогранников.

2. В некоторых пособиях для средней школы (см., например, [20], ч. 2, стр. 37) приводится следующее определение призмы: «Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы». Под это определение подходит, например, многогранник, изображенный на рисунке 123. Примером выпуклого многогранника, удовлетворяющего тому же определению, может служить так называемый *ромбический додекаэдр* (или ромбододекаэдр) — многогранник, составленный из двенадцати равных ромбов, — изображенный на рисунке 124. Чтобы построить грань такого многогранника, достаточно: 1) построить правильный треугольник $AB'C$ (рис. 125); 2) провести в нем высоту $B'H$; 3) построить равнобедренный треугольник ABC, у которого боковая сторона AB равна $B'H$; 4) дополнить треугольник ABC до ромба $ABCD$. На рисунке 126 изображена развертка такого многогранника.

«Растягивая» ромбический додекаэдр (заменяя в нем шесть ромбов шестью равными параллелограммами), мы получим опять многогранник, подходящий под упомянутое здесь определение призмы (см. рис. 127).

Упомянутое определение призмы нельзя считать доброкачественным: из него не вытекают, например, известные формулы объема

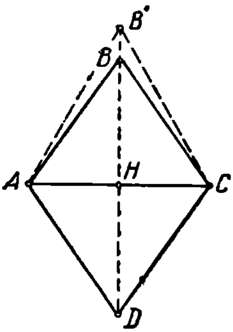


Рис. 125.

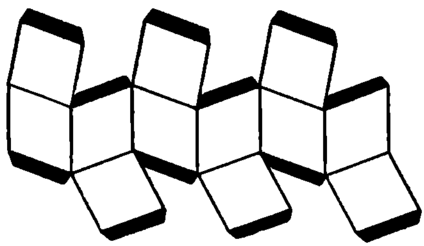


Рис. 126.

или боковой поверхности призмы или то обстоятельство, что число граней призмы на две больше числа сторон основания.

Корректное определение можно дать, например, в следующей форме: **призмой** *называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с параллельными соответствующими сторонами, а остальные грани — параллелограммы, каждый из которых имеет с каждой из ранее названных граней по общей стороне.*

Равные грани с параллельными соответствующими сторонами, о которых говорится в определении призмы, называются *основаниями призмы*, а остальные ее грани называются *боковыми.*

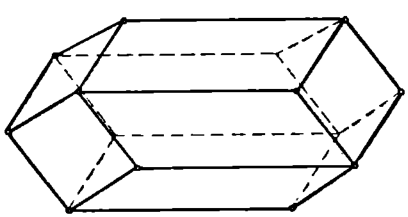


Рис. 127.

Существуют и другие варианты правильных определений понятия «призма» (см. например, [12], ч. 2, стр. 62).

3. Напомним определение пирамиды, известное из школьного курса геометрии: «Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину». Треугольные грани пирамиды, имеющие общую вершину, называются *боковыми* ее гранями. Кроме них пирамида имеет еще одну грань, называемую основанием пирамиды.

Преподавателю геометрии следует иметь в виду, что учащиеся нередко допускают ошибки при определении пирамиды.

Приведем несколько примеров.

1) Определение использует ранее не определенное понятие «основание» тела пирамиды: «Пирамидой называют тело, основанием которого служит...».

2) В определении пирамиды требуется, чтобы основание было выпуклым многоугольником (лишнее ограничение).

3) В определении пирамиды опускается требование, чтобы боковые грани имели общую вершину.

4. Понятие *усеченной пирамиды* обычно вводится с помощью понятия пирамиды, а именно: усеченной пирамидой называется часть пирамиды, которая заключена между плоскостью основания этой пирамиды и плоскостью, пересекающей пирамиду и параллельной плоскости ее основания.

Наряду с таким определением иногда даются непосредственные определения усеченной пирамиды через понятие «многогранник» (см., например, [35], стр. 209). Такого рода определение также вполне законно. Однако оно часто дается с ошибкой. Приведем для примера два таких ошибочных определения (т. е. не равносильных приведенному выше).

1) «Усеченной пирамидой называется многогранник, у которого две грани — одноименные многоугольники с параллельными соответствующими сторонами, а остальные грани — трапеции».

Это определение слишком широко, оно не равносильно принятому определению усеченной пирамиды, о котором мы говорили выше. Контрпримером может служить многогранник, носящий название «обелиск» и изображенный на рисунке 128 ($ABCD$ и $EFGH$ — прямоугольники, продолженные боковые ребра AE, BF, CG, DH не имеют общей точки).

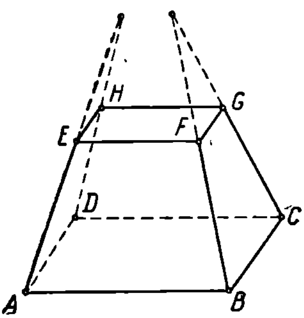


Рис. 128.

2) «Усеченной пирамидой называется многогранник, боковые грани которого — трапеции, а верхние и нижние основания — подобные многоугольники с параллельными соответствующими сторонами» (см. [35], стр. 209). В таком определении содержится логическая ошибка (понятие усеченной пирамиды определяется через не определенное ранее понятие «верхнее (нижнее) основание многогранника»). Более существенно то, что определение содержит и другую ошибку: под него подходит, например, многогранник, изображенный на рисунке 129.

Правильное определение усеченной пирамиды возможно получить по аналогии с определением призмы: *усеченной пирамидой* называется многогранник, у которого две грани являются подобными многоугольниками с параллельными сходственными сторонами, а остальные грани являются трапециями, *каждая из которых имеет с каждой из ранее названных граней по общей стороне.*

Мы здесь не задерживаемся на многочисленных понятиях, связанных с призмами и пирамидами (понятие бокового ребра, диагонали, высоты и др.), и на свойствах этих многогранников.

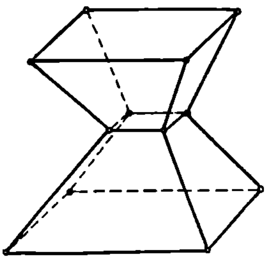


Рис. 129.

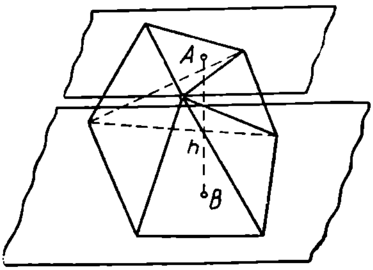


Рис. 130.

Читателю рекомендуется восстановить в памяти этот материал, пользуясь школьными учебниками.

Призмы, пирамиды, усеченные пирамиды относятся к классу призматоидов.

Призматоидом называется многогранник, у которого две грани — произвольные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а каждая из остальных граней — треугольник или четырехугольник, все вершины которого принадлежат ранее названным параллельным граням[1] (рис. 130).

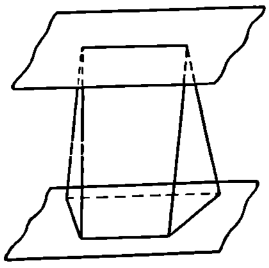


Рис. 131.

Параллельные грани, о которых говорится в определении призматоида, называются его *основаниями*, а остальные его грани — *боковыми*. *Высотой* призматоида называется всякий перпендикуляр, опущенный из точки одного основания на плоскость другого основания (см. отрезок AB на рис. 130).

Если одно из оснований призматоида вырождается в точку, то мы получим, очевидно, пирамиду. Если одно из оснований призматоида — четырехугольник, а другое вырождается в отрезок, то образуется многогранник, называемый *клином* (рис. 131).

---

[1] Мы иногда называем *параллельными* такие грани, которые лежат в параллельных плоскостях.

§ 15. СВЯЗНОСТЬ МНОГОГРАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И РОД МНОГОГРАННИКА

1. Под данное выше определение простого многогранника подходят разнообразные фигуры. Чтобы их расклассифицировать, введем несколько новых понятий.

Начнем с понятия разреза. Будем различать разрезы замкнутые и незамкнутые. *Замкнутым разрезом* многогранной поверхности (в частности, многогранника) назовем замкнутую простую ломаную, которая составлена из каких-либо ребер поверхности и не имеет общих точек с краем поверхности. *Незамкнутым разрезом* многогранной поверхности назовем простую незамкнутую ломаную, составленную из каких-либо ребер поверхности и имеющую с краем поверхности только две общие точки — концы этой ломаной (совпадение этих точек не исключается).

С первого взгляда может показаться, что всякий разрез (замкнутый или незамкнутый) непременно разбивает многогранную поверхность (в частности, двумерный многогранник) на два «куска». Однако мы вскоре убедимся, что это не так.

Уточним сначала смысл выражения *разрез разбивает поверхность*. Это значит, что среди точек поверхности, не принадлежащих разрезу, имеются такие, которые нельзя соединить ломаной, лежащей на поверхности и не пересекающей разрез. Если же каждые две точки поверхности (не принадлежащие разрезу) возможно соединить ломаной, лежащей на поверхности и не пересекающей разрез, то говорят, что *разрез не разбивает поверхность*,

Многогранная поверхность называется *односвязной*, если всякий разрез разбивает ее на две поверхности. В противном случае она называется *многосвязной*.

Спичечная коробка без крышки — модель односвязной поверхности. Крышка от спичечной коробки — модель многосвязной поверхности: на ней можно указать не разбивающие ее разрезы (например, разрез по ребру AA_1 на рис. 117).

Поверхность, состоящую из одного многоугольника, будем считать односвязной.

Односвязный многогранник принято называть *многогранником нулевого рода*. Таким образом, многогранник нулевого рода характеризуется тем, что всякая простая замкнутая ломаная, состоящая из ребер многогранника, разбивает его на две многогранные поверхности.

Многогранники, изучаемые в школьном курсе геометрии, являются многогранниками нулевого рода. Можно доказать, что всякий выпуклый многогранник является многогранником нулевого рода. Обратное, очевидно, неверно. Например, многогранник, изображенный на рисунке 120,— нулевого рода, но невыпуклый.

Может показаться неожиданным, что существуют многогранники ненулевого рода, т. е. такие, которые не расчленяются каким-то замкнутым разрезом на два «куска». Простой прием образования таких многогранников состоит в том, что к многограннику нулевого рода «приделывают многогранные ручки», как это представлено на рисунке 132 на примере прямоугольного параллелепипеда. После «установки ручки на грань» следует удалить из этой грани «основания» ручки и разбить оставшуюся часть грани на простые многоугольники (на рис. 132 такое разбиение производят, например, отрезки AE, DF, $D'F'$, $A'E'$). Разрез по одному из «оснований ручки» (например, по четырехугольнику $ABCD$), очевидно, не приведет к разбиению построенного многогранника (с ручкой) на два «куска».

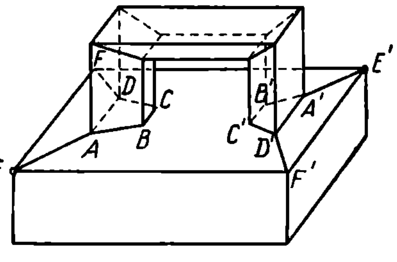


Рис. 132.

2. Допустим, что какой-либо незамкнутый разрез L_1 не разбил многогранную поверхность S с краем на два «куска». Присоединим этот разрез L_1 к краю K многогранной поверхности. Таким образом, возникает новая многогранная поверхность S_1, край которой K_1 включает как край K поверхности S, так и разрез L_1. На вновь образованной поверхности S_1 проведем новый незамкнутый разрез L_2, который согласно определению имеет с краем K_1 поверхности S_1 лишь две общие точки — концы разреза. Если каждый такой разрез разбивает поверхность S_1, то исходная поверхность S называется *двусвязной*.

Если же на поверхности S_1 найдется неразбивающий ее разрез, то повторим описанное построение. Таким путем приходим к следующему общему определению.

Многогранная поверхность называется *n-связной* (имеющей порядок связности n), если на ней можно провести последовательно $n-1$ незамкнутых разрезов, которые не разбивают поверхность, а любые n незамкнутых разрезов уже осуществляют такое разбиение.

Моделью двусвязной многогранной поверхности может служить, например, крышка спичечной коробки.

Простые многогранники различают по их р о д у. Если на многограннике существует k замкнутых разрезов без общих точек, которые не разбивают многогранник, а каждые $k+1$ таких разрезов уже разбивают его, то он называется *многогранником* рода k.

Типичный пример многогранника рода k можно получить, устанавливая k «ручек» на произвольном многограннике нулевого рода. Такое представление о многограннике рода k является и наиболее общим в том смысле, что любой многогранник рода k возможно деформировать без разрывов и склеиваний в многогранник нулевого рода с k «ручками». Другой прием образования многогранников ненулевого рода состоит в том, что многогранник рода k получают из многогранника рода $k-1$ путем «пробивания» в нем многогранного отверстия. На рисунке 133 изображены многогранники первого и пятого рода, образованные таким путем из прямоугольного параллелепипеда.

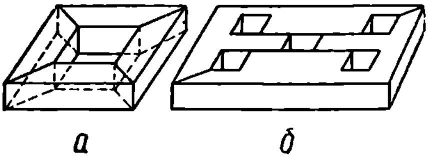


Рис. 133.

Аналогичным образом можно себе наглядно представить образование незамкнутых многогранных поверхностей (т. е. поверхностей с краем) различных порядков связности. Предположим, что поверхность изготовлена из эластичного материала (из резины). Односвязную поверхность с краем можно непрерывно деформировать (растянуть, разгладить) в круг (или в простой двумерный многоугольник). Незамкнутую поверхность связности n можно представить себе как полученную из некоторой односвязной поверхности путем вырезания $n-1$ многоугольных «дыр» с непересекающимися границами.

Отметим еще без доказательства два важных свойства многогранных поверхностей.

(1). *Отнимая от многогранника нулевого рода любую грань, всегда получим односвязную многогранную поверхность.*

Это предложение выражает характеристическое свойство многогранника нулевого рода, т. е. равносильно ранее приведенному определению многогранника нулевого рода.

(2). *От односвязной многогранной поверхности с краем, имеющей не менее двух граней, всегда возможно так отнять одну грань, чтобы оставшиеся грани образовали опять односвязную поверхность.*

§ 16. ТЕОРЕМА ДЕКАРТА—ЭЙЛЕРА О МНОГОГРАННИКАХ

1. Между числом вершин **В**, числом граней **Г** и числом ребер **Р** любого выпуклого многогранника существует простая зависимость, впервые (около 1620 г.) установленная Р. Декартом и позднее (в 1752 г.) заново открытая Л. Эйлером.

Теорема 1. (Теорема Декарта — Эйлера для выпуклого многогранника.) *Сумма числа вершин* **В** *и числа граней* **Г** *выпуклого многогранника на две единицы больше числа его ребер* **Р**:

$$\mathbf{В}+\mathbf{Г}=\mathbf{Р}+2.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную грань α выпуклого многогранника M (рис. 134). Всегда возможно выбрать в пространстве такую точку S, из которой все остальные грани этого многогранника будут проектироваться на грань α в виде многоугольников без общих внутренних точек.

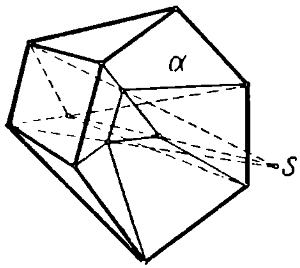


Рис. 134.

Выбор такой точки S можно осуществить следующим образом. Рассмотрим все грани многогранника, примыкающие к грани α. Обозначим плоскости, в которых лежат эти грани, соответственно через

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,$$

а через

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$$

обозначим полупространства, которые лежат соответственно по ту же сторону от плоскостей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что и данный многогранник. Пересечение

$$\Pi = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_n$$

выпуклых фигур (полупространств) Π_i есть выпуклая фигура, содержащая многогранник **М**. Обозначим через Π_0 то полупространство относительно плоскости α, которое не содержит многогранник **М**. В качестве точки S возможно взять произвольную точку, лежащую внутри пересечения $\Pi_0 \cap \Pi$.

Наглядно можно представить себе грань α в виде окошка, через которое «просматривается» внутренность многогранника **М**. Если многогранник выпуклый, то можно стать настолько близко к окошку, чтобы была видна вся внутренность многогранника.

Проектируя из точки S на грань α все остальные грани многогранника, получим на грани α некоторую сеть многоугольников. На этой сети каждой вершине многогранника соответствует один и только один узел, каждому ребру — один и только один отрезок.

Вычислим теперь двумя различными способами сумму всех плоских углов многогранника.

При проектировании какой-либо грани β_i на грань α получим многоугольник β_i' с тем же числом сторон. Значит, сумма углов многоугольника β_i равна сумме углов его проекции. Сумма всех плоских углов многогранника **М** (без грани α) равна сумме углов всех многоугольников, образовавшихся на грани α в результате проектирования. Число всех вершин этих многоугольников, очевидно, равно **В**. Из них некоторые (обозначим их число через k) принадлежат контуру многоугольника α, а остальные $(\mathbf{B}-k)$ лежат внутри многоугольника α. Поэтому общая сумма углов всех образовавшихся многоугольников равна:

$$4d(\mathbf{B}-k)+2d(k-2).$$

К этой сумме надо прибавить еще сумму углов грани α, т. е. $2d(k-2)$. Таким образом, сумма всех плоских углов многогранника оказывается равной:

$$\sum = 4d(\mathbf{B}-k)+4d(k-2) = 4d(\mathbf{B}-2). \qquad (1)$$

Эту же сумму $\sum$ можно вычислить иным путем. Пусть грани многогранника занумерованы, и грань с номером ν имеет r_ν ребер.

Тогда, очевидно,

$$\sum = 2d(r_1 - 2) + 2d(r_2 - 2) + \cdots + 2d(r_\Gamma - 2) = 2d(r_1 + r_2 + \cdots + r_\Gamma) - 4d\,\mathbf{Г}.$$

Но каждое ребро принадлежит двум граням, так что в нашем расчете каждое ребро было учтено дважды, т. е.

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\Gamma = 2\mathbf{Р}.$$

Поэтому

$$\sum = 2d \cdot 2\mathbf{Р} - 4d\,\mathbf{Г} = 4d(\mathbf{Р} - \mathbf{Г}). \tag{2}$$

Из (1) и (2) непосредственно следует:

$$4d(\mathbf{В} - 2) = 4d(\mathbf{Р} - \mathbf{Г}),$$

т. е.

$$\mathbf{В} + \mathbf{Г} = \mathbf{Р} + 2, \tag{3}$$

что и требовалось доказать[1].

Число $\mathbf{В}+\mathbf{Г}-\mathbf{Р}$ часто называют **эйлеровой характеристикой** многогранника (или многогранной поверхности). Пользуясь этой терминологией, можно сформулировать теорему 1 следующим образом.

Эйлерова характеристика выпуклого многогранника равна двум.

2. Нетрудно представить себе, что выпуклый многогранник возможно непрерывно деформировать таким образом, чтобы он утратил свойство выпуклости, но чтобы у него при этом не изменилось ни число вершин, ни число ребер, ни число граней. Понятно, что и после такой деформации образуется многогранник, для которого остается в силе теорема 1. Таким образом, условие выпуклости не является необходимым для того, чтобы эйлерова характеристика многогранника была равна 2.

Покажем, что *формула Декарта — Эйлера остается в силе для каждого* (безразлично — выпуклого или невыпуклого) *многогранника нулевого рода.*

Отнимем от многогранника нулевого рода одну грань. Остается односвязная многогранная поверхность S с краем. Пусть у нее **г** граней, **в** вершин, **р** ребер. Эти числа связаны с числом граней **Г**, числом вершин **В** и числом ребер **Р** данного многогранника зависимостями:

$$\mathbf{В} = \mathbf{в}, \quad \mathbf{Г} = \mathbf{г} + 1, \quad \mathbf{Р} = \mathbf{р}.$$

Поэтому

$$\mathbf{В} + \mathbf{Г} - \mathbf{Р} = (\mathbf{в} + \mathbf{г} - \mathbf{р}) + 1.$$

---

[1] Обратим внимание на то, что в ходе доказательства мы воспользовались выпуклостью многогранника лишь для вывода формулы (1).

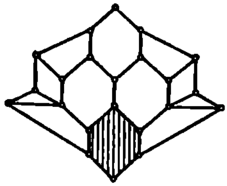


Рис. 135.

От поверхности S можно теперь отнять одну грань (рис. 135) так, чтобы осталась односвязная поверхность (S'). Обозначим числа вершин, граней и ребер поверхности S' соответственно через **в**$'$, **г**$'$, **р**$'$. Чтобы отнять грань, надо провести разрез по каким-то μ внутренним ребрам. У отброшенной грани, помимо этого, имелось еще какое-то число ν граничных ребер (на рис. 135 $\mu=4$, $\nu=2$). На разрезе будет всего $\mu+1$ вершин. Кроме этих, отрезанный многоугольник имел еще $\nu-1$ вершин. Поэтому

$$\text{г}=\text{г}'+1,\quad \text{р}=\text{р}'+\nu,\quad \text{в}=\text{в}'+\nu-1.$$

Следовательно,

$$\text{в}+\text{г}-\text{р}=\text{в}'+\text{г}'-\text{р}'.$$

Итак, мы видим, что возможно так отделить одну грань от односвязной многогранной поверхности S, чтобы оставшаяся поверхность S' имела ту же эйлерову характеристику. Но применительно к поверхности S' можно повторить такие же рассуждения: отбросив одну ее грань, получим новую поверхность S'' с той же эйлеровой характеристикой. Будем выполнять такую операцию до тех пор, пока не останется поверхность, состоящая из единственной грани. Пусть у этой грани k ребер. Тогда у нее столько же вершин. Поэтому ее эйлерова характеристика, а значит и эйлерова характеристика поверхности S, равна:

$$k+1-k=1.$$

Следовательно,

$$\text{в}+\text{г}-\text{р}=1.$$

В таком случае для исходного многогранника имеет место соотношение $\text{В}+\text{Г}-\text{Р}=2$, которое и требовалось получить.

3. Предложения, сходные с теоремой Декарта — Эйлера, можно получить для многогранников любого рода и для поверхности любой связности. Приведем здесь одно из таких предложений.

Теорема 2. *Эйлерова характеристика k-связной многогранной поверхности равна $2-k$.*

Доказательство. Для $k-1$ справедливость этого предложения была уже установлена в ходе предыдущих рассуждений: эйлерова характеристика односвязной многогранной поверхности равна единице.

Пусть теперь $k>1$. По определению k-связной поверхности на данной поверхности S можно провести последовательно $k-1$ незамкнутых разрезов L_1, L_2, ..., L_{k-1}, не разбивающих поверхность, причем после проведения этих разрезов останется односвязная поверхность.

Пусть разрез L_1 состоит из n_1 ребер. Тогда вершин у него n_1+1. Поэтому после проведения разреза L_1 образуется поверхность S_1, для которой число вершин $\mathbf{в}_1$, число граней $\mathbf{г}_1$ и число ребер $\mathbf{р}_1$ определяются по формулам:

$$\mathbf{в}_1=\mathbf{в}+n_1+1,\quad \mathbf{г}_1=\mathbf{г},\quad \mathbf{р}_1=\mathbf{р}+n_1,$$

(ибо каждую вершину и каждое ребро разреза следует теперь считать дважды). Поэтому

$$\mathbf{в}_1+\mathbf{г}_1-\mathbf{р}_1=\mathbf{в}+\mathbf{г}-\mathbf{р}+1.$$

Таким образом, после проведения разреза L_1 эйлерова характеристика увеличилась на единицу. Совершенно аналогично будет обстоять дело и после проведения дальнейших разрезов: $L_2, \ldots, L_{k-1}$. Поэтому в результате проведения всех этих разрезов получим какую-то поверхность S_{k-1}, у которой эйлерова характеристика

$$\mathbf{в}_{k-1}+\mathbf{г}_{k-1}-\mathbf{р}_{k-1}=(\mathbf{в}+\mathbf{г}-\mathbf{р})+(k-1).$$

Но поверхность S_{k-1} односвязна, так что ее эйлерова характеристика равна единице. Значит,

$$\mathbf{в}_{k-1}+\mathbf{г}_{k-1}-\mathbf{р}_{k-1}=1.$$

Поэтому

$$\mathbf{в}+\mathbf{г}-\mathbf{р}=2-k. \tag{4}$$

Теорема доказана.

Проводя сходные рассуждения, можно доказать, что эйлерова характеристика многогранника рода k равна $2-2k$:

$$\mathbf{В}+\mathbf{Г}-\mathbf{Р}=2-2k. \tag{5}$$

Последней формулой пользуются иногда для доказательства того факта, что *выпуклый многогранник имеет род нуль*. В самом деле, по теореме 1 для выпуклого многогранника

$$\mathbf{В}+\mathbf{Г}-\mathbf{Р}=2.$$

И в силу формулы (5) получаем, что для него $2-2k=2$, так что $k=0$.

Пользуясь формулой (5), можно заключить также, что *эйлерова характеристика многогранника равна нулю тогда и только тогда, когда многогранник имеет род нуль*, иначе говоря, что класс многогранников рода нуль совпадает с классом многогранников, для которых эйлерова характеристика равна двум.

Из теоремы Декарта — Эйлера можно вывести разнообразные следствия относительно свойств многогранников нулевого рода. Приведем здесь несколько примеров таких предложений, рекомендуя читателю найти их доказательства самостоятельно или познакомиться с этими доказательствами по соответствующим источникам (см., например, [42], ч. III).

1. *Сумма всех плоских углов многогранника нулевого рода равна* $4d\,(\mathbf{В}-2)$.

2. *Не существует многогранника нулевого рода, у которого каждая грань имела бы больше пяти сторон.*

3. *Каждый многогранник нулевого рода имеет треугольную грань, или трехгранный угол.*

Одно из наиболее важных следствий теоремы Декарта — Эйлера рассматривается в следующем параграфе.

§ 17. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Если у многогранника все грани — правильные равные многоугольники, то отсюда еще не следует, что и многогранные углы являются правильными или равными. Контрпример приведен на рисунке 119.

Многогранник называется правильным, если:

1) все его грани равны и правильны и

2) все его многогранные углы равны и правильны.

Легко понять, что такое определение избыточно, некоторые указанные в нем признаки возможно опустить. Но мы предпочтем это определение из-за его наглядности.

Будем говорить, что два правильных многогранника *относятся к одному и тому же типу*, если у них равны следующие характеристики: число вершин **В**, число граней **Г**, число ребер **Р**, число вершин у каждой грани n, число граней s, сходящихся в одну и ту же вершину.

Оказывается, что *существует только 5 типов правильных многогранников нулевого рода.*

Покажем сначала, что *не может быть больше пяти типов правильных многогранников нулевого рода.*

Найдем зависимость между **В**, **Г**, **Р**, n, s. У каждой грани n ребер, всего граней — **Г**, так что всего мы, таким образом, насчитываем $n\mathbf{Г}$ ребер; но при этом мы каждое ребро учитывали дважды (ибо каждое ребро является стороной двух граней). Поэтому

$$n\mathbf{Г}=2\mathbf{Р}. \tag{1}$$

Число ребер, сходящихся в одну вершину, равно s; всего вершин **В**, так что мы таким образом насчитываем $s\mathbf{В}$ ребер. Но при этом каждое ребро учитывалось дважды (ибо оно соединяет две вершины).

Поэтому

$$s\mathbf{В}=2\mathbf{Р}. \tag{2}$$

Кроме того, имеет место формула Эйлера:

$$\mathbf{В}+\mathbf{Г}=\mathbf{Р}+2. \tag{3}$$

Из (1) — (3) следует, что

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathbf{Р}}. \tag{4}$$

Кроме того, геометрически ясно, что

$$n \geqslant 3, \quad s \geqslant 3. \tag{5}$$

Нам предстоит найти целые положительные решения неопределенного уравнения (4) при дополнительных условиях (5). Заметим следующее:

I. Если хотя бы одно из чисел n или s больше, чем 3, то второе равно 3.

Действительно, если $n \geqslant 4$ и $s \geqslant 4$; то

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{2},$$

так что (4) не имеет места.

II. Ни одно из чисел n и s не может быть больше, чем 5. Действительно, пусть $s \geqslant 6$. Тогда $n=3$, и поэтому

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{\text{P}},$$

так что равенство (4) опять не имеет места. Аналогично обстоит дело, если $n \geqslant 6$.

Теперь уже нетрудно перебрать все допустимые комбинации натуральных чисел n, s, Р, при которых удовлетворяется уравнение (4). По формулам (1) — (2) можем найти соответствующие значения n и s.

Результаты расположим в виде следующей таблицы:

	n	s	Р	В	Г	Название правильного многогранника с такими характеристиками
I	3	3	6	4	4	Правильный тетраэдр
II	3	4	12	6	8	Правильный октаэдр
III	3	5	30	12	20	Правильный икосаэдр
IV	4	3	12	8	6	Правильный гексаэдр
V	5	3	30	20	12	Правильный додекаэдр

Итак, если многогранник нулевого рода правильный, то он обязательно должен относиться к одному из пяти перечисленных здесь типов.

Обратим здесь внимание на то, что в ходе проведенных рассуждений мы пользовались только двумя свойствами правильных многогранников, вытекающими из их определения: 1) в каждую вершину такого многогранника сходится одно и то же число граней (s); 2) все грани имеют одно и то же число вершин (n). Многогранники нулевого рода, обладающие этими двумя свойствами, иногда называют *топологически правильными*. Такими будут, например, произвольный параллелепипед, произвольная треугольная пирамида и др. В ходе наших рассуждений мы доказали, что *и топологически правильных многогранников нулевого рода имеется не более пяти типов.*

Заметим, что могут существовать также топологически правильные многогранники ненулевого рода (см., например, рис. 133, *а*).

Оказывается, что *правильные многогранники каждого из перечисленных в предыдущей таблице типов действительно существуют.* Чтобы убедиться в этом, достаточно указать способ образования многогранника каждого типа. Опишем сейчас соответствующие построения.

Представителей каждого из пяти типов правильных многогранников можно получить, отправляясь от куба. Построение куба хорошо известно читателю: достаточно через все четыре вершины какого-либо квадрата $ABCD$ провести прямые, перпендикулярные к его плоскости, и отложить на них по одну сторону от этой плоскости отрезки AA', BB', CC', DD', равные стороне квадрата; полученные восемь точек служат вершинами куба.

Куб и есть правильный гексаэдр.

Центры граней куба служат вершинами *правильного октаэдра* (рис. 122).

Если диагонали трех граней куба имеют общую вершину, то их концы являются вершинами *правильного тетраэдра* (рис. 136).

Топологически правильный икосаэдр можно построить следующим образом. Выберем три грани куба с общей вершиной (рис. 137). В каждой из этих граней проведем ее среднюю линию, причем так, чтобы эти три средние линии были попарно перпендикулярны. На каждой из них, на одном и том же расстоянии x от центра соответствующего квадрата отметим две точки, так что получим всего шесть точек. Построим еще шесть точек, симметричных ранее построенным относительно центра куба, каждую из этих двенадцати точек соединим с пятью ближайшими к ней точками. Всего полу-

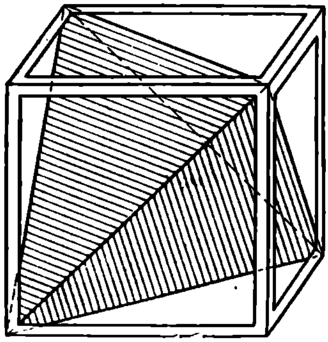


Рис. 136.

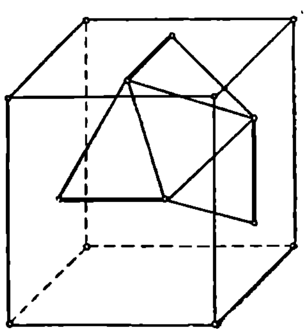


Рис. 137.

чим $\frac{12\cdot5}{2}=30$ отрезков. Нетрудно проверить, что отрезок x можно выбрать так, чтобы все образовавшиеся тридцать отрезков были равны между собой. Можно, далее, проверить, что эти тридцать отрезков образуют каркас *правильного икосаэдра*. Наглядное представление об этом методе построения правильного икосаэдра дает модель, изображенная на рисунке 138.

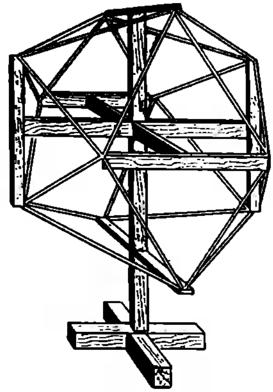


Рис. 138.

Центры граней правильного икосаэдра служат вершинами *правильного додекаэдра*; наглядное представление об этом дает рисунок 139.

Правильный додекаэдр возможно получить также из куба следующим образом (рис. 140). На каждой грани куба (например, на $ABCD$) как на основании построим «шатер» ($ABCDEF$), у которого все четыре «боковых ребра» (AE, BF, CF и DE) равны между собой, причем $EF \parallel AB$ и $EF<AB$. Две из граней этого «шатра» ($ABFE$ и $CDEF$) — равные равнобочные трапеции, а две другие (ADE и BCF) — равные треугольники. «Шатры» следует располагать так, чтобы для каждой пары смежных граней куба (например, $ABCD$ и $BCC'B'$) соответствующие «шатры» имели взаимно перпендикулярные «коньки» (в нашем примере EF и KL). К каждому ребру (например, BC) куба будет примыкать треугольник (BCF) от одного «шатра» и трапеция ($BCKL$) от смежного «шатра».

Возможно выбрать размеры «шатров» таким образом, чтобы этот треугольник и эта трапеция лежали в одной плоскости и составляли вместе правильный пятиугольник. Тогда многогранник, составленный из шести «шатров», построенных на всех гранях куба, будет правильным додекаэдром.

Мы ознакомились, таким образом, со способами построения правильных многогранников всех возможных пяти типов. Что касается

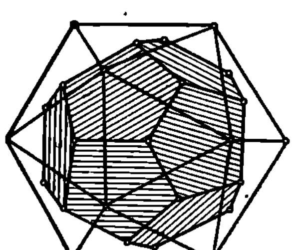


Рис. 139.

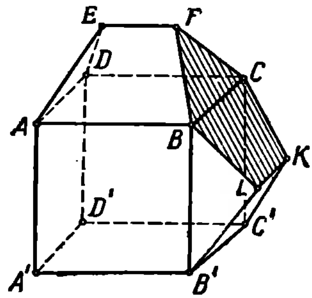


Рис. 140.

доказательства того, что эти многогранники действительно являются правильными, то во всех случаях может быть использована одна общая идея, а именно идея вращения многогранника вокруг надлежащим образом выбранных осей. Такие повороты позволяют совместить:

1) любую грань рассматриваемого многогранника с любой другой его гранью;

2) любой многогранный угол — с любым другим многогранным углом;

3) любое ребро — с любым другим ребром;

4) любой плоский угол — с любым плоским углом;

5) любой двугранный угол — с любым другим двугранным углом.

Это означает, что все грани многогранника равны между собой (см. п. 1), все многогранные углы равны (см. п. 2), все грани — правильные многоугольники (см. п. 3 и 4), все многогранные углы — правильные (см. п. 4 и 5).

Желательно, чтобы читатель самостоятельно проследил за такой возможностью выбора вращения хотя бы на примере октаэдра.

Отметим некоторые важные свойства правильных многогранников.

1. *Внутри каждого правильного многогранника существует точка, которая служит центром трех сфер: описанной сферы* (т. е. проходящей через все вершины многогранника); *вписанной сферы* (т. е. касающейся всех его граней); *полувписанной сферы* (т. е. касающейся всех его ребер).

2. *Для каждого правильного многогранника существует такой другой правильный многогранник, называемый взаимным по отношению к данному многограннику, что из любого истинного предложения о пяти характеристиках* **В**, **Г**, **Р**, *n*, *s* *для данного многогранника можно получить истинное предложение для взаимного многогранника, если в исходном предложении поменять местами слова «грань» и «вершина».*

Взаимным многогранником для куба служит октаэдр (и наоборот), для икосаэдра — додекаэдр (и наоборот), для тетраэдра — тетраэдр.

Приведем п р и м е р. Возьмем истинное предложение: «У икосаэдра 12 вершин и 20 граней». Поменяем в нем слово «икосаэдр» на «додекаэдр» и переставим слова «вершина» и «грань». Получим другое, опять-таки истинное, предложение: «У додекаэдра 12 граней и 20 вершин».

3. *Центры граней правильного многогранника служат вершинами взаимного многогранника.*

§ 18. ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

1. Правильный многогранник согласно данному выше определению должен удовлетворять четырем требованиям: все его грани правильные и равные; все его многогранные углы правильные и

равные. К понятию полуправильного многогранника придем, опустив два из этих четырех требований.

Многогранник называется *равноугольно-полуправильным* или *архимедовым*, если все его многогранные углы равны между собой (но не обязательно правильные), а все его грани — правильные многоугольники (но не все равны между собой). Такие многогранники были впервые рассмотрены Архимедом в III в. до н. э. в недошедшем до нас сочинении, а затем описаны известным немецким астрономом и математиком Иоганном Кеплером (1571—1630) в книге «Гармония мира».

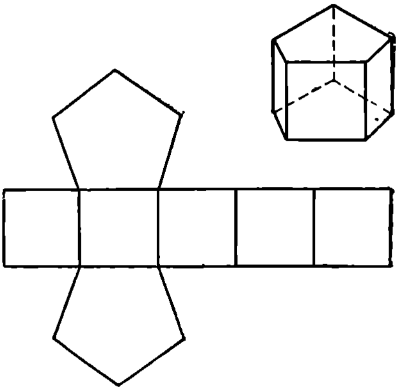


Рис. 141.

Простейшим примером архимедова многогранника может служить *архимедова призма*, т. е. правильная n-угольная призма с квадратными боковыми гранями (рис. 141). Другой пример — так называемая n-угольная *архимедова антипризма* (рис. 142). Она может быть получена, если одно из оснований правильной n-угольной призмы ($n \geqslant 4$) повернуть вокруг оси призмы на угол $\frac{180^\circ}{n}$ и затем соединить отрезками каждую вершину этого основания с ближайшими вершинами другого основания; при этом высота призмы должна быть подобрана так, чтобы эти отрезки оказались равными стороне основания (иначе говоря, боковые грани антипризмы должны быть правильными треугольниками). Меняя n, мы получим две бесконечные серии архимедовых многогранников — призм и антипризм.

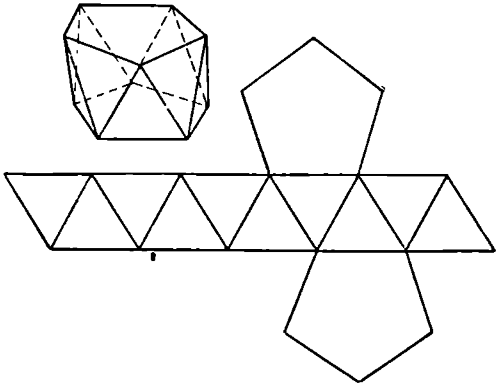


Рис. 142.

Будем относить к одному и тому же типу два полуправильных многогранника нулевого рода, если:

1) при любом n у них одно и то же число n-угольных граней (одинаковое число треугольников, четырехугольников и т. д.);

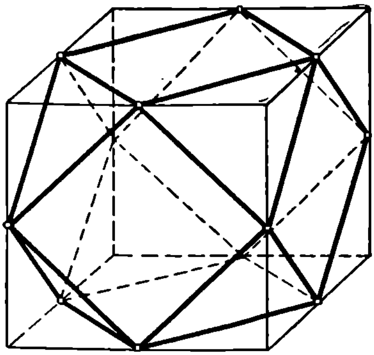


Рис. 143.

2) при любом s у них одно и то же число s-гранных углов (одинаковое число трехгранных углов, одинаковое число четырехгранных углов и т. п.).

У таких многогранников также совпадают характеристики **Г**, **В**, **Р**. Как показал Иоганн Кеплер, существуют (кроме рассмотренных выше серий призм и антипризм) еще 13 различных типов простых архимедовых многогранников.

Многие архимедовы многогранники можно получить, если отсечь у всех вершин правильного многогранника равные правильные пирамиды (размеры этих пирамид не могут, разумеется, быть произвольными). На рисунке 143 изображен один такой многогранник, которому Кеплер дал название *кубооктаэдр*. Он может быть получен из куба, если отсечь у каждой его вершины треугольную пирамиду, проводя плоскость через середины трех ребер, исходящих из этой вершины. У кубооктаэдра 6 квадратных граней, остальные 8 граней — правильные треугольники. В каждую вершину сходятся два квадрата и два треугольника. Форму кубооктаэдра имеет кристалл аргентита (Ag_2S). Другой простой пример архимедова многогранника получим, если у каждой вершины правильного тетраэдра с ребром a отсечем правильный тетраэдр с ребром $\frac{1}{3}a$ (см. рис. 144).

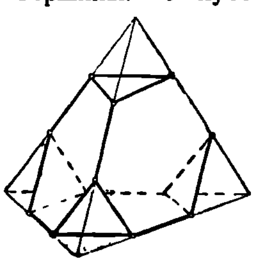


Рис. 144.

Установлено, что архимедов многогранник может иметь грани не более чем трех различных наименований. Самое большое число граней у архимедова многогранника, отличного от призмы и антипризмы, равно 92: у него 80 треугольных и 12 пятиугольных граней.

Может показаться, что если два архимедова многогранника принадлежат к одному и тому же типу, а ребра у многогранников равны, то сами многогранники равны; это представляется очевидным. Однако советский геометр В. Г. Ашкинузе [6] недавно показал, что для одного типа полуправильных многогранников это не так: два многогранника, приведенные на рисунках 145 и 146, принадлежат к одному и тому же типу (у каждого из них по 18 квадратных и по 8 треугольных граней, по 24 вершины и по 48 ребер); но из равенства их ребер не следует равенство многогранников (т. е. не следует возможность их совмещения).

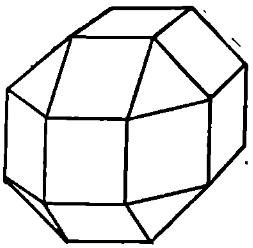


Рис. 145.

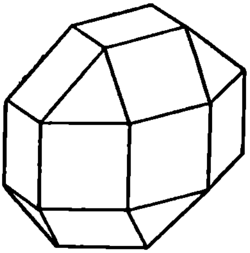


Рис. 146.

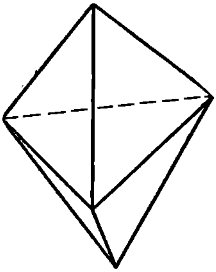


Рис. 147.

2. Многогранник называется *равногранно-полуправильным*, если у него все грани — равные многоугольники (но не обязательно правильные), а все многогранные углы правильные (но не все равны между собой).

Чтобы получить простейший пример такого многогранника, сложим основаниями две равные правильные пирамиды (рис. 147). Возможно, очевидно, так подобрать высоты этих пирамид, чтобы четырехгранные углы при вершинах общих оснований были правильными (т. е. чтобы все двугранные углы такого четырехгранного угла были равны между собой).

На рисунке 124 изображен равногранно-полуправильный многогранник, который называется ромбическим двенадцатигранником (или ромбододекаэдром). Он составлен из 12 равных ромбов, образующих 14 правильных многогранных углов — 6 четырехгранных и 8 трехгранных.

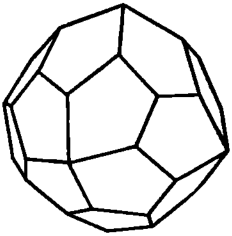


Рис. 148.

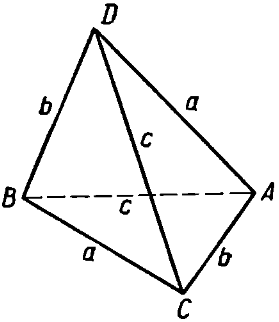


Рис. 149.

3. В кристаллографии приходится встречаться с классом многогранников, более широким, чем равногранно-полуправильные, это класс *равногранных* многогранников, или *изоэдров*.

Форму изоэдра имеет, например, кристалл куприта (Cu_2O); это выпуклый многогранник, ограниченный 24 равными неправильными пятиугольниками (рис. 148).

Простейшим примером изоэдра, не являющегося правильным или полуправильным многогранником, может служить неправильный равногранный тетраэдр (рис. 149), т. е. неправильный тетраэдр, у которого равны между собой противоположные ребра: $AB=CD=c$, $BC=AD=a$, $CA=BD=b$, причем отрезки a, b, c не все равны между собой. Для получения такого многогранника достаточно в произвольном прямоугольном параллелепипеде (рис. 150), отличном от куба, выбрать произвольную вершину D и в трех гранях, примыкающих к этой вершине, провести диаго-

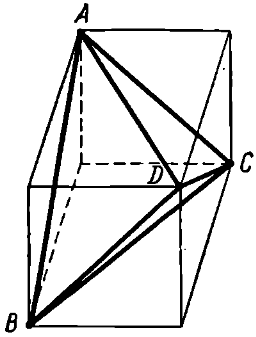


Рис. 150.

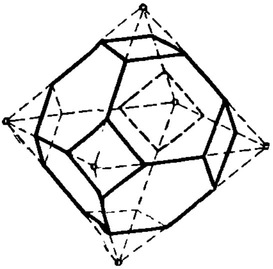


Рис. 151.

нали DA, DB, DC. Четыре точки A, B, C, D и будут вершинами равногранного тетраэдра.

Обобщением понятия архимедова многогранника является понятие равноугольного многогранника, или *изогона* (у него все многогранные углы равны, а грани могут быть произвольными). Простой пример изогона мы получим, если у всех вершин правильного октаэдра с ребром a отсечь от этого октаэдра правильную четырехугольную пирамиду с ребром, меньшим чем $\frac{1}{2}a$. Такую форму имеет, в частности, кристалл флюорита CaF_2 (рис. 151). Изоэдр, изображенный на рисунке 149, является одновременно и изогоном.

§ 19. КАРКАСНЫЕ (ОДНОМЕРНЫЕ) МНОГОГРАННИКИ

До сих пор мы рассматривали многогранник либо как поверхность (совокупность простых двумерных многоугольников, удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям), либо как тело (внутренняя область двумерного простого многогранника). Существует еще третий подход к понятию многогранника, а именно: под многогранником понимают некоторую совокупность одномерных многоугольников, т. е. фигуру, составленную из прямолинейных отрезков. Вот определение этого понятия. *Каркасным* или *одномерным многогранником* называется совокупность одномерных плоских многоугольников, расположенных в пространстве так, что:

1) каждая сторона любого многоугольника служит стороной еще только одного многоугольника;

2) для любых двух вершин многоугольников этой совокупности существует ломаная, составленная из сторон многоугольников и имеющая эти вершины своими концами.

Сами эти одномерные многоугольники называются *гранями* каркасного многогранника.

Понятно, что множество всех контуров граней всякого простого двумерного многогранника образует каркасный многогранник. Мы назовем его *простым каркасным многогранником.*

Но существуют еще и другие каркасные многогранники. У этих последних может оказаться, что внутренние области одномерных многоугольников имеют общие точки или что стороны этих многоугольников имеют общие внутренние точки и т. п.

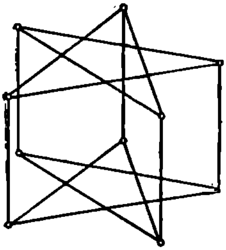


Рис. 152.

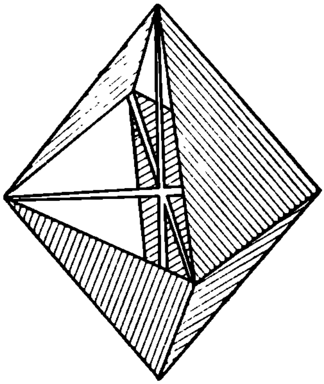


Рис. 153.

Каркасный многогранник, не являющийся простым, называют *звездчатым.*

Простейший пример звездчатого многогранника — это звездчатая призма (рис. 152), определение которой можно очевидным образом получить из определения призмы. Другой пример получим, если рассмотрим совокупность трех диагональных сечений правильного октаэдра вместе с четырьмя его гранями, не имеющими попарно общих ребер. Это семигранник (гептаэдр), изображенный на рисунке 153.

Многоугольник, входящий в состав звездчатого многогранника, может оказаться простым — тогда имеет смысл говорить о его внутренней области и соответствующем ему двумерном многоугольнике. Выше (§ 10) мы видели, что возможно определить понятие внутренней точки звездчатого многоугольника, а следовательно, и понятие двумерного звездчатого многоугольника.

Совокупность всех *двумерных* многоугольников, соответствующих всем одномерным граням звездчатого каркасного многогранника, иногда называют *двумерным звездчатым* многогранником. Может оказаться, что такой многогранник разбивает пространство не на

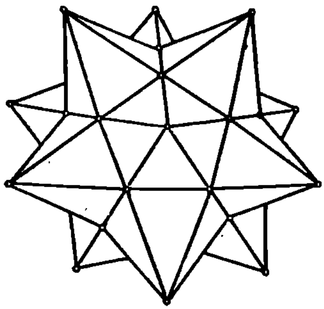


Рис. 154.

две, а на большее число областей или вовсе не разбивает пространство (таков, например, двумерный гептаэдр).

Данное выше для простых многогранников определение правильного многогранника можно, не изменив в нем ни единого слова, перенести и на случай звездчатых многогранников.

Еще Кеплер нашел и описал в своей книге «Гармония мира» два типа звездчатых правильных многогранников. Один из них — *малый звездчатый додекаэдр* — изображен на рисунке 154. Французский математик Л. Пуансо (1777—1859) обнаружил в 1810 г. еще два типа таких многогранников. А через два года, в 1812 г., его соотечественник, знаменитый математик Огюстен Коши (1789—1857) доказал, что (с точностью до подобия) других правильных звездчатых многогранников, кроме указанных четырех, не существует. Основные данные об этих четырех типах многогранников приведены в таблице.

Тип	Название	Форма грани	Число граней	Форма многогранных углов	Число вершин	Число ребер
I	Малый звездчатый додекаэдр	Правильный звездчатый пятиугольник	12	Выпуклый правильный пятигранный угол	12	30
II	Большой звездчатый додекаэдр	То же	12	Трехгранный угол	20	30
III	Большой додекаэдр	Правильный выпуклый пятиугольник	12	Правильный звездчатый пятигранный угол	12	30
IV	Звездчатый икосаэдр	Правильный треугольник	20	То же	12	30

§ 20. О ПОСТРОЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ СЕЧЕНИЙ

1. В процессе преподавания стереометрии учителю математики как по ходу доказательства теорем, так и при решении задач постоянно приходится пользоваться изображениями многогранных по-

верхностей на плоскости. Ясно, что многогранная поверхность изображается на плоскости, вообще говоря, с теми или иными искажениями. Так, например, все отрезки, изображающие ребра куба (рис. 155), прямолинейны, но они не все равны между собой, не все углы, образуемые изображениями ребер, прямые и т. д.

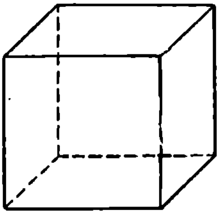


Рис. 155.

Построение изображений пространственных фигур на плоскости (и на других поверхностях) составляет предмет начертательной геометрии. Там, на теоретической основе проективной и аффинной геометрии, изучаются различные приемы построения изображений. В практике работы учителя-математика обычно нет ни возможности, ни необходимости излагать основы начертательной геометрии или широко пользоваться ее методами. Но ему нельзя также полностью полагаться на интуицию, так как это может повести к ошибкам, которые будут дурно влиять на развитие пространственных представлений учащихся.

Вопросы изображения пространственных фигур на плоскости в условиях преподавания геометрии подробно разработаны проф. Н. Ф. Четверухиным [40].

Остановимся здесь на некоторых практически важных для учителя математики соображениях относительно принципов и приемов построения изображений простейших многогранных поверхностей и их сечений.

Наиболее важные требования к геометрическому чертежу сводятся к трем свойствам: *верности*, *наглядности* и *простоте* построения. Иногда эти требования приходят между собой в известное противоречие, и тогда надо отдать предпочтение тому или иному из них, в зависимости от постановкн задачи.

Выясним, какой смысл вкладывается в термин «верное изображение».

Изображение пространственной фигуры обычно рассматривается в элементарной геометрии как параллельная проекция этой фигуры на некоторую плоскость. Значительно реже пользуются центральным проектированием. В некоторых прикладных науках (например, в картографии) используются другие виды проекций.

Аппарат параллельного проектирования состоит из: 1) плоскости П, называемой *плоскостью проекций* (рис. 156), и 2) прямой Δ, непараллельной плоскости проекций. Прямая Δ, называемая *направляющей* (иногда *директрисой*), определяет направление параллельного проектирования.

Если $\Delta \perp П$, то проекция называется *прямоугольной* или *ортогональной*.

Проекцией точки A' на плоскость П по направлению прямой Δ называется точка A (рис. 156) пересечения с плоскостью П прямой, проведенной через точку A' параллельно прямой Δ.

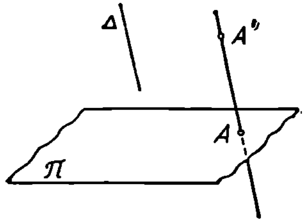


Рис. 156.

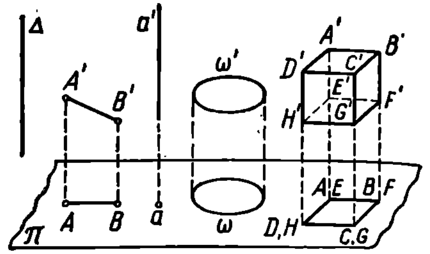


Рис. 157.

Проекцией фигуры Ф′ на плоскость П называется фигура Ф, составленная из проекций всех точек фигуры Ф′. На рисунке 157 изображены некоторые фигуры и их ортогональные проекции.

Параллельная проекция обладает следующими основными свойствами:

1) *Точки, расположенные на одной прямой* (не параллельной директрисе), *проектируются в точки одной прямой* (рис. 158).

2) *Параллельные прямые* (не параллельные директрисе), *проектируются в параллельные же прямые* (рис. 159) *или в одну прямую.*

3) *Отношение параллельных или лежащих на одной прямой отрезков равно отношению их проекций.*

4) *Отрезок, параллельный плоскости проекции, проектируется в равный и параллельный ему отрезок.*

Будем считать изображение пространственной фигуры в параллельной проекции в е р н ы м, если существует такой аппарат параллельного проектирования, при котором проекция этой фигуры равна (или хотя бы подобна) данному изображению. Например, каждый квадрат есть верное изображение куба в ортогональной проекции (см. рис. 157), каждый круг есть верное изображение шара в ортогональной проекции. Напротив, распространенное изображение сферы, приведенное на рисунке 160, будет неверным в указанном здесь смысле. Действительно, контур изображения сферы имеет форму окружности только в случае ортогональной проекции.

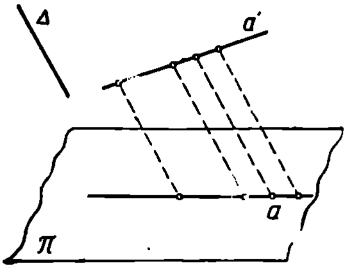


Рис. 158.

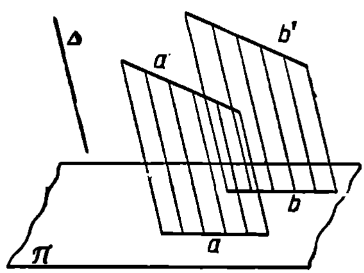


Рис. 159.

Но если при этом концы диаметра проектируются в точки A и B контура, то окружность большого круга, плоскость которого перпендикулярна этому диаметру, будет проектироваться не в эллипс ω, а в прямолинейный отрезок.

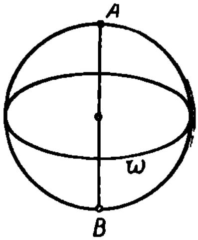


Рис. 160.

Изображение пространственной фигуры естественно считать **наглядным**, если оно вызывает в сознании правильное представление об оригинале. Не всякое верное изображение удовлетворяет требованию наглядности. Например, изображение куба в виде квадрата или изображение окружности в виде отрезка верное, но не наглядное. Другой пример верного изображения куба (в виде правильного шестиугольника с диагоналями), лишенного наглядности, приведен на рисунке 161: этот рисунок либо вовсе не вызывает представления о кубе, либо вызывает представление о нескольких различных кубах.

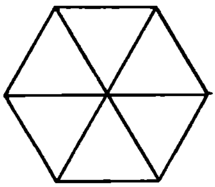


Рис. 161.

Требованию наглядности обычно в большей степени (нежели изображения, полученные посредством параллельного проектирования) удовлетворяют изображения, построенные по методу центрального проектирования. Именно такие изображения получаются на фотографиях. Принципами центрального проектирования часто пользуются художники.

Аппарат центрального проектирования состоит из: 1) плоскости П, называемой *плоскостью проекций*, и 2) точки S, не принадлежащей плоскости П и называемой *центром проектирования* (рис. 162).

Проекцией точки A' на плоскость П из центра S называется точка A пересечения прямой SA' с плоскостью П. Такие точки M', для которых прямая SM' параллельна плоскости П, не имеют проекций.

Проекцией фигуры Ф′ называется фигура Ф, составленная из проекций всех точек фигуры Ф′.

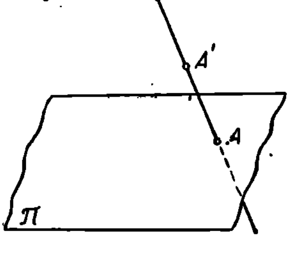


Рис. 162.

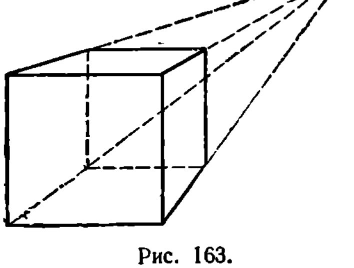


Рис. 163.

На рисунке 163 приведено изображение куба в центральной проекции.

Свойства центральной проекции сложнее, нежели свойства параллельной проекции. В частности, параллельные прямые проектируются в параллельные же в том и только в том случае, если они параллельны плоскости проекций; только в этом случае сохраняет при проектировании свое значение отношение параллельных отрезков.

Именно из-за большей простоты свойств параллельное проектирование чаще употребляется в элементарной геометрии. В дальнейшем, если не будет специальной оговорки, то речь пойдет о параллельных проекциях.

2. Очень полезны для воспитания пространственных представлений учащихся задачи на построение изображений пересечений многогранных поверхностей с плоскостями и между собой. Приведем некоторые наиболее распространенные примеры построения изображений плоских сечений простейших многогранников.

Пример 1. Построить линию пересечения поверхности куба $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 164) с плоскостью, заданной точкой A и точками P и Q, лежащими соответственно на ребрах $B'C'$ и $C'D'$.

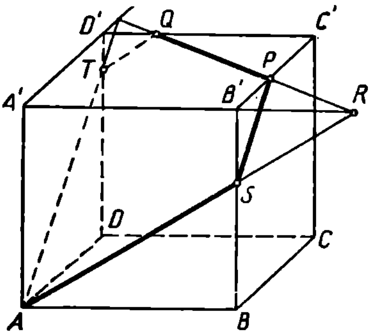


Рис. 164.

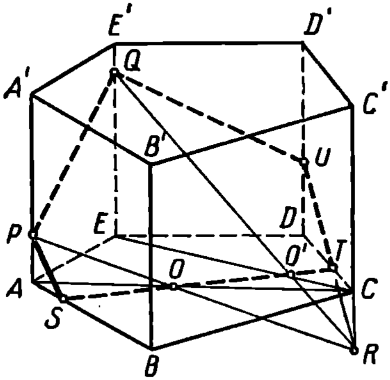


Рис. 165.

Непосредственно строится отрезок PQ, по которому данная плоскость пересекает грань $A'B'C'D'$.

Точка A — одна из общих точек секущей плоскости и плоскости $ABB'A'$. Другая общая точка R этих плоскостей получится в пересечении прямых $A'B'$ и PQ. Прямая AR — линия пересечения секущей плоскости с плоскостью грани $ABB'A'$. Пусть S — точка пересечения прямых BB' и AR. Тогда данная плоскость пересекает грань $ABB'A'$ по отрезку AS. Аналогично находят отрезок AT, по которому данная плоскость пересекает грань $ADD'A'$.

Итак, данная плоскость пересекает поверхность куба по пятиугольнику $ASPQT$.

Пример 2. Построить сечение поверхности прямой пятиугольной призмы $ABCDEA'B'C'D'E'$ плоскостью PQR, если точка P дана на ребре AA', точка Q — на ребре EE' и точка R — на продолжении ребра CC' (рис. 165).

Строят отрезок PQ, по которому данная плоскость пересекает грань $AEE'A'$.

Прямая PR встречает плоскость основания $ABCDE$ данной призмы в той точке O, где она пересекается со своей ортогональной проекцией AC на плоскость основания. Аналогично строят точку O' пересечения прямой QR с плоскостью того же основания.

Данная плоскость пересекает плоскость основания $ABCDE$ данной призмы по отрезку ST, где S и T — точки пересечения прямой OO' с контуром основания. PS — пересечение данной плоскости с гранью $ABB'A'$.

Если U — точка пересечения прямых RT и DD', то пятиугольник $PSTUQ$ есть искомое сечение.

Пример 3. Дано изображение пятиугольной пирамиды $SABCDE$. Дана также точка P, лежащая на высоте SS' этой пирамиды (рис. 166). Построить сечение поверхности данной пирамиды плоскостью ABP.

Пусть

$$AS' \times CD \equiv A', \quad A'S \times AP \equiv P'.$$

Тогда P' — общая точка секущей плоскости и плоскости грани SCD.

Аналогично строят общую точку P'' секущей плоскости и грани SDE.

Если $AA' \times DE \equiv Q$, $AP \times SQ \equiv \equiv P'''$, то P''' — еще одна общая точка секущей плоскости и плоскости грани SDE. Следовательно, $P''P'''$ — линия пересечения секущей плоскости с плоскостью грани SDE.

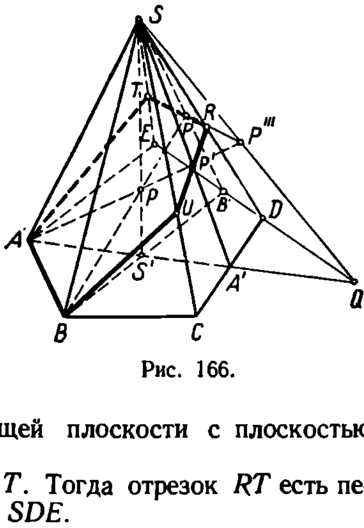


Рис. 166.

Пусть $P''P''' \times SD \equiv R$, $P''P''' \times SE \equiv T$. Тогда отрезок RT есть пересечение секущей плоскости гранью SDE.

Пересечение секущей плоскости с гранью SDE получим, продолжая прямую RP' до пересечения с SC в точке U. $ABURT$ — искомое сечение.

3. Часто приходится строить изображения правильного треугольника, квадрата, правильного шестиугольника. Какими же соображениями можно руководствоваться при построении этих изображений?

Любой треугольник ABC можно рассматривать как изображение правильного треугольника $A'B'C'$ в параллельной проекции. Достаточно предположить, например, что сторона $A'B'$ совпадает со своей проекцией AB (рис. 167), после чего правильный треугольник $A'B'C'$ можно расположить произвольно и принять направление $C'C$ за направление проектирования.

Любой параллелограмм $ABCD$ (рис. 168) можно рассматривать как изображение (в параллельной проекции) прямоугольника с любым наперед заданным отношением сторон (в частности, квадрата).

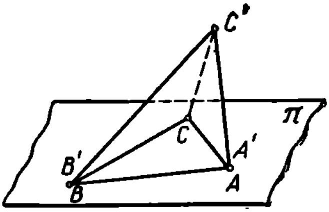


Рис. 167.

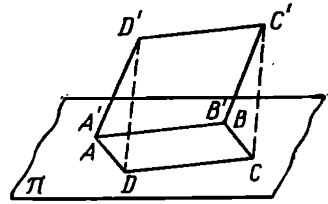


Рис. 168.

Изображение правильного шестиугольника в параллельной проекции удобно строить следующим образом. Пусть $ABCD$ (рис. 169) — произвольный параллелограмм, MN — его средняя линия. Если $ME = NF = \frac{1}{2}MN$ (E и F — во внешней области параллелограмма), то $ABFCDE$ — верное изображение правильного шестиугольника.

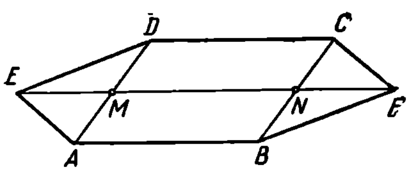


Рис. 169.

Сказанное здесь переносится и на случай ортогонального проектирования, так как оказывается: *если плоская фигура Ф есть параллельная проекция другой плоской фигуры Ф′, то фигуру Ф можно рассматривать как ортогональную проекцию фигуры, подобной Ф′*. Доказательство этой интересной теоремы можно найти, например, в [40], стр. 38.

Одной из самых важных для теории изображений является так называемая теорема Польке — Шварца: *любой невырожденный четырехугольник с его диагоналями можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра произвольной формы*[1]. Доказательство этой теоремы также приведено в [40], стр. 43.

4. Остановимся вкратце еще на вопросе о построении изображений правильного додекаэдра и правильного икосаэдра.

На рисунке 170 приведена ортогональная проекция правильного додекаэдра на плоскость, параллельную одной из его граней. Проекция $ABCDE$ этой его грани ($A'B'C'D'E'$) равна оригиналу.

Можно показать, что проекции M_1, M_2, ..., M_{10} десяти вершин M_1', M_2', ..., M_{10}' граней, примыкающих к грани $A'B'C'D'E'$,

[1] Четырехугольник называется невырожденным, если никакие три его вершины не лежат на одной прямой.

располагаются в вершинах некоторого правильного десятиугольника, имеющего тот же центр, что и $ABCDE$.

Обращаясь к изложенному на странице 109 способу образования правильного додекаэдра из куба, можно показать еще, что четырехугольник $M_1'E'C'M_3'$ (в натуре) есть квадрат со стороной, параллельной плоскости грани $A'B'C'D'E'$; поэтому его ортогональная проекция M_1ECM_3 (рис. 170) — прямоугольник.

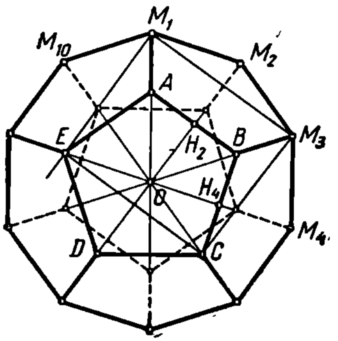


Рис. 170.

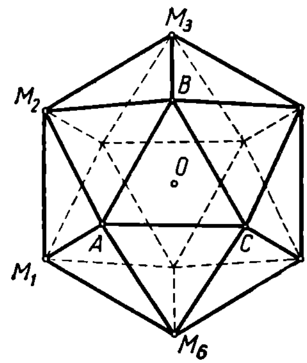


Рис. 171.

Эти соображения позволяют после построения правильного пятиугольника $ABCDE$ построить вершины M_1 (или M_3) правильного десятиугольника $M_1 \ldots M_{10}$, а затем получить и все изображение додекаэдра.

На рисунке 171 изображена ортогональная проекция правильного икосаэдра на плоскость, параллельную плоскости его грани $A'B'C'$. Эта грань изображается без искажения в виде правильного треугольника ABC. Можно показать, что шестиугольник $M_1M_2 \ldots M_6$ правильный и что радиус OM_1 делится точкой A в крайнем и среднем отношении, то есть

$$AM_1 : AO = AO : M_1O. \qquad (1)$$

Используя эти свойства проекции икосаэдра и располагая треугольником ABC, можно построить точку M_1, а затем и все изображение многогранника.

Заметим, что соотношение (1) остается в силе и для изображения додекаэдра (рис. 169).

Для построения эскиза изображения правильного икосаэдра (или додекаэдра) удобно воспользоваться приближенным равенством:

$$AM_1 : OM_1 \approx 3 : 5. \qquad (2)$$

(см. [20], ч. I, п. 209).

Обоснование изложенных здесь построений можно найти в [32].

5. Иногда изображение какой-либо пространственной фигуры должно удовлетворять определенным дополнительным требованиям.

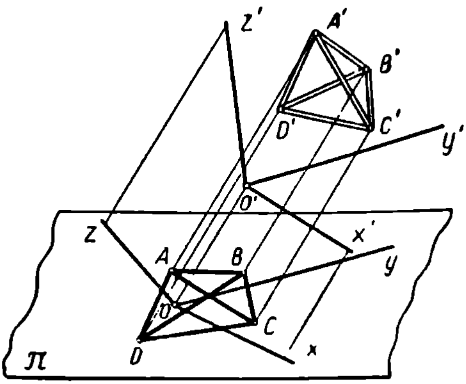


Рис. 172.

Например, некоторые отрезки или плоские сечения должны быть изображены без искажения (т. е. в натуральную величину) или должно быть ясно из чертежа, каковы размеры отдельных отрезков или в каком отношении находятся их длины и т. п. В таких случаях может оказаться очень полезным один общий способ изображения пространственных фигур (в параллельной проекции) — способ *аксонометрии*. Сущность этого способа заключается в следующем.

С пространственной фигурой, которую намерены изобразить на чертеже, связывают определенную (обычно прямоугольную) систему координат $O'x'y'z'$.

При проектировании на плоскость чертежа три оси координат $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ изобразятся в виде каких-то трех прямых Ox, Oy, Oz (рис. 172).

Расположение этих прямых будет зависеть от выбора направления проектирования и от расположения трех осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ относительно плоскости чертежа.

После того как три оси $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ изображены на плоскости чертежа в виде трех прямых Ox, Oy, Oz, приступают к изображению самой фигуры. При этом отрезки, лежащие в пространстве на какой-либо из осей (например, на $O'y'$), изобразятся в виде отрезков, лежащих на соответствующей прямой (Oy), причем все они будут иметь один и тот же «коэффициент искажения», т. е. их длины на чертеже могут быть получены, если их длины в натуре умножить на одно и то же число k. Отрезки, параллельные какой-либо из трех осей (например, оси $O'y'$), изобразятся в виде отрезков, параллельных соответствующей прямой, изображающей эту ось (в нашем примере Oy), причем все такие отрезки тоже будут иметь один и тот же коэффициент искажения. На этих соображениях основан метод аксонометрии[1].

Различные специальные виды аксонометрии изучаются в начертательной геометрии и черчении.

В практике изучения элементарной геометрии для изображения многогранников весьма удобен один частный вид аксонометрии, а именно так называемая *кабинетная* проекция. При этом способе

[1] Слово «аксонометрия» означает в переводе на русский язык «измерение по осям».

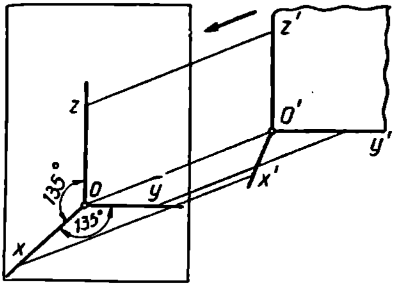


Рис. 173.

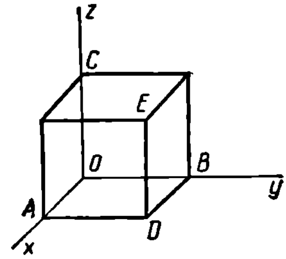


Рис. 174.

фигура проектируется на плоскость чертежа не ортогонально, а под некоторым острым углом $\alpha \approx 63°$. При этом мыслится, что система осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ располагается в пространстве так, чтобы плоскость $y'O'z'$ была параллельна плоскости чертежа (или совпала с нею). Ясно, что фигуры, лежащие в плоскости $y'O'z'$, изобразятся без искажения. Направление проектирующих лучей выбирается таким образом, чтобы: 1) ось $O'x'$ изобразилась в виде прямой Ox, образующей углы по 135° с взаимно перпендикулярными прямыми Oy и Oz (рис. 173); 2) коэффициент искажения по оси Ox составлял $\frac{1}{2}$, т. е. чтобы каждый отрезок, параллельный оси $O'x'$, был на чертеже вдвое короче, чем в натуре.

На рисунке 174 изображен в кабинетной проекции куб со стороной a. Здесь

$$OB=OC=a, \quad OA=\frac{1}{2}a.$$

На рисунке 175 изображен в кабинетной проекции куб с ребром a, так что его диагональное сечение $ODEC$ изображается без искажений. Здесь

$$OC=a, \quad OD=a\sqrt{2}\approx 1{,}4a, \quad AB=\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad AB \parallel Ox.$$

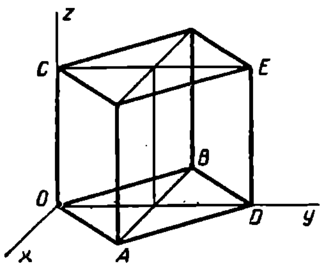


Рис. 175.

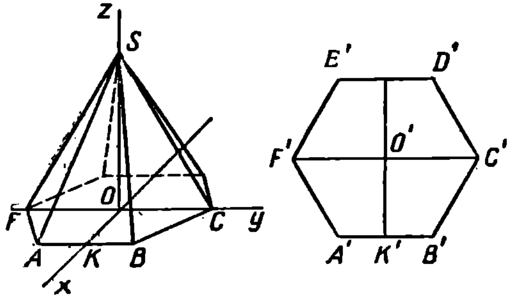


Рис. 176.

На рисунке 176 приведено изображение правильной шестиугольной пирамиды. Здесь диагональ основания CF и высота SO изображаются без искажения,

$$OK=\frac{1}{2}O'K', \quad AB=A'B'.$$

Вопросы для повторения

Что называется одномерным многоугольником?

Какие одномерные многоугольники называют звездчатыми?

Как читается теорема Жордана о простом многоугольнике?

Как узнать, лежит ли данная точка внутри или вне простого многоугольника?

Приведите примеры (начертите) выпуклого и невыпуклого многоугольников.

Каков точный смысл термина «угол многоугольника»?

Приведите примеры (начертите): правильного многоугольника, равностороннего неправильного многоугольника, равноугольного неправильного многоугольника.

Постройте равноугольно-полуправильный четырехугольник, шестиугольник.

Как построить равносторонне-полуправильный шестиугольник?

Постройте равноугольно-полуправильный двенадцатиугольник «методом среза».

Что называется многогранным углом? Какие дополнительные условия налагают обычно на общее определение многогранного угла?

Как строится трехгранный угол, пополнительный к данному трехгранному углу?

Перечислите признаки равенства трехгранных углов.

Что называется многогранной поверхностью? Прнведите примеры.

В каких случаях точка многогранной поверхности будет точкой самопересечения этой поверхности?

Как различают внутренние и граничные ребра многогранной поверхности?

Когда многогранная поверхность называется (двумерным) многогранником?

Что называется трехмерным многогранннком?

Будет ли двумерный выпуклый многогранннк выпуклой фигурой?

Будет ли выпуклой фигурой трехмерный выпуклый многогранник?

Приведнте прнмер тела, ограннченного плоскими многоугольниками, но не подходящего под определенне многогранника.

Что называется призмой; параллелепипедом; пирамидой; усеченной пирамидой?

Дайте определение призматоида и приведите несколько примеров.

Что называется разрезом многогранной поверхности?

Как определяется порядок связности многогранной поверхности?

Приведите пример невыпуклого многогранника нулевого рода.

Существуют ли выпуклые многогранники ненулевого рода?

Приведите примеры многогранников первого и второго рода.

Какой порядок связности имеет многогранник нулевого рода; первого рода?

Как читается теорема Эйлера о многогранниках нулевого рода?

Проверьте формулу Эйлера на примере n-угольной призмы, n-угольной пирамиды.

Какое соотношение между числом граней, числом вершин и числом ребер имеет место для многогранника ненулевого рода?

Когда многогранник называется правильным?

Перечислите пять видов правильных многогранников нулевого рода, приведите их названия, для каждого из них укажите число вершин, граней и ребер.

Какую форму имеет плоская развертка боковой поверхности правильного тетраэдра?

Вершинами какого многогранника служат середины ребер правильного тетраэдра?

Как построить эскиз правильного икосаэдра?

Как построить эскиз правильного додекаэдра?

Назовите взаимный многогранник для каждого из пяти правильных многогранников нулевого рода.

Какие многогранники называют архимедовыми? Приведите примеры.

Какой многогранник называют равногранно-полуправильным?

Что такое изоэдр?

Приведите пример изогона.

Что называется одномерным многогранником?

Дайте определение звездчатой призмы.

Задачи

К § 10—11

1. Докажите, что середины диагоналей и середины двух противоположных сторон четырехугольника (плоского или пространственного) служат вершинами некоторого параллелограмма или лежат на одной прямой.

2. Докажите, что прямые, соединяющие вершину параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной вершине, рассекают диагональ, соединяющую две другие вершины, на три равные части.

3. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

4. Простой n-угольник разбит на треугольники так, что внутри многоугольника располагается k вершин треугольников, а остальные вершины треугольников располагаются в вершинах многоугольников. Найдите число образовавшихся треугольников.

5. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь одномерный n-угольник?

6. Докажите, что все диагонали правильного пятиугольника ограничивают правильный пятиугольник.

7. Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками деления противоположных сторон, ограничивают равносторонне-полуправильный шестиугольник.

8. Определите вид четырехугольника, образуемого точками пересечения сторон параллелограмма с биссектрисами углов между его диагоналями.

К § 12

9. Покажите, что всегда можно провести плоскость так, чтобы она пересекала грани четырехгранного угла по параллелограмму.

10. A, B и C — три произвольные точки, принадлежащие соответственно ребрам прямого трехгранного угла (т. е. такого, все плоские углы которого прямые). Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

К § 13—14

11. Докажите, что не существует простого многогранника с нечетным числом граней, каждая из которых содержит нечетное число сторон.

12. Докажите, что у каждого простого многогранника не менее шести ребер.

13. Докажите, что существует тетраэдр (т. е. треугольная пирамида), высоты которого не пересекаются в одной точке.

14. Докажите, что не существует простого многогранника, имеющего семь ребер.

15. Докажите, что существуют многогранники с любым числом ребер, большим 7.

16. Докажите, что каждая треугольная пирамида обладает плоским сечением в форме ромба.

17. Докажите, что если все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то основание высоты пира-

миды есть центр окружности, описанной около основания пирамиды.

18. Докажите, что если все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то основание высоты пирамиды есть центр окружности, вписанной в ее основание.

19. Докажите, что любая точка высоты правильной пирамиды проектируется на плоскость боковой грани в точку, лежащую на высоте боковой грани.

20. Докажите, что если через прямую, соединяющую середины двух противоположных ребер тетраэдра, провести какую-либо плоскость, пересекающую два других противоположных ребра тетраэдра, то отрезок, соединяющий точки пересечения, делится первой прямой пополам.

К § 15—16

21. От многогранника первого рода, изображенного на рисунке 133, *а*, отнимают одну грань. Каков будет порядок связности оставшейся многогранной поверхности?

22. Найдите эйлерову характеристику многогранника, изображенного на рисунке 133, *б*.

23. Изготовьте модель невыпуклого многогранника нулевого рода.

24. Приведите доказательства свойств 1—3 многогранника нулевого рода, сформулированных в конце § 16.

25. Изготовьте модель какого-либо многогранника первого рода.

К § 17—19

26. Докажите, что в пересечении поверхности куба плоскостью, проходящей через центр куба перпендикулярно его диагонали, образуется правильный шестиугольник.

27. Докажите, что две плоскости, определяемые концами двух троек ребер куба, исходящих из концов его диагонали, делят эту диагональ на три равные части.

28. Как надо провести плоскость, чтобы она пересекала поверхность правильного тетраэдра по одномерному квадрату?

29. Какой многоугольник образуется при пересечении поверхности правильного тетраэдра плоскостью, параллельной двум его противоположным ребрам? Докажите, что периметр этого сечения не зависит от выбора такой секущей плоскости.

30. Как надо провести плоскость, чтобы она пересекала поверхность правильного октаэдра по правильному шестиугольнику?

31. Можно ли куб пересечь плоскостью так, чтобы получить в сечении: а) прямоугольный или тупоугольный треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник; г) ромб, отличный от квадрата; д) параллелограмм, отличный от ромба; е) трапецию; ж) правильный пятиугольник; з) какой-либо семиугольник?

32. Два правильных тетраэдра приложены один к другому так, что они имеют общую грань. Будет ли образовавшийся многогранник правильным? Будет ли он полуправильным?

33. Изготовьте модели всех пяти типов правильных многогранников.

34. Изготовьте модели: а) кубооктаэдра; б) ромбододекаэдра; в) равногранного (но неправильного) тетраэдра.

К § 20

35. На рисунке 177 изображена треугольная призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$; точки M, N, P лежат соответственно в ее боковых гранях $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $C_1A_1A_2C_2$. Изобразите сечение этой призмы плоскостью MNP.

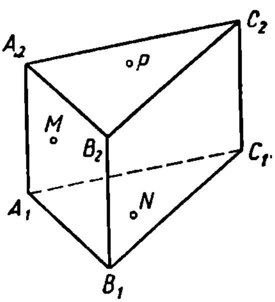


Рис. 177.

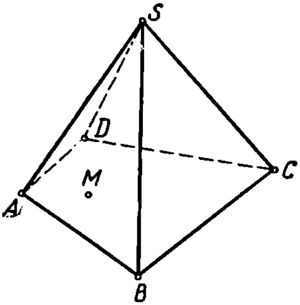


Рис. 178.

36. На рисунке 178 изображена четырехугольная пирамида $SABCD$; точка M лежит на грани SAB. Изобразите сечение этой пирамиды плоскостью CDM.

37. Начертите какую-либо шестиугольную пирамиду $SABCDEF$. Изобразите сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания CE и параллельной ребру SA.

38. Изобразите в кабинетной проекции правильную треугольную пирамиду так, чтобы сечение, проходящее через одно боковое ребро и высоту, было изображено без искажений.

ГЛАВА III

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 21. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Геометрические фигуры обладают разнообразными свойствами. Иногда мы можем отметить только наличие или отсутствие у данной фигуры того или иного свойства: ограниченность (окружности) или неограниченность (прямой линии), равенство всех сторон (правильного треугольника) или отсутствие этого свойства (у прямоугольного треугольника) и т. п. Относительно некоторых других свойств фигур можно сказать большее, а именно: оказывается, что различные фигуры могут не только обладать или не обладать каким-либо свойством, но могут обладать им *в разной степени*, могут иметь свойство в большем или меньшем *количестве*. Иногда мы можем указать даже, сколько «единиц этого свойства» имеет та или иная фигура. Таково, например, свойство отрезка иметь длину, свойство плоской фигуры иметь площадь, свойство тела иметь объем.

Естественно, что каждый раз при рассмотрении такого рода свойств фигуры мы должны прежде всего отдать себе отчет в том, когда следует считать, что фигура обладает (или не обладает) интересующим нас свойством. Затем мы должны понять, каким образом можно определить «количество» этого свойства у данной фигуры, т. е. каким образом можно сопоставить данной фигуре неотрицательное число, указывающее, сколько у нее имеется единиц этого свойства. Например, нам надо отдать себе отчет, в каком случае следует считать, что плоская фигура имеет площадь, и что значит, что площади у данной фигуры столько-то единиц.

Итак, *длина*, *площадь*, *объем* — это свойства геометрических фигур. Если фигура обладает каким-либо из этих свойств, то количество этого свойства у фигуры следует называть соответственно *мерой длины*, или *мерой площади*, или *мерой объема*. Но обычно вместо этого говорят короче соответственно: «длина», «площадь», «объем». Таким образом, понятия «длина», «площадь», «объем» приобретают второй смысл: это числа, числовые характеристики геометрических фигур. Именно этот смысл указанных понятий важен для математических расчетов.

Геометрическая фигура обладает свойством величины, если ей можно сопоставить определяемую тем или иным способом числовую характеристику, и притом так, что эта числовая характеристика подчиняется требованиям инвариантности и аддитивности, сущность которых будет раскрыта ниже. Свойствами величины обладают отрезки прямых и дуги кривых линий, углы, простые многоугольники и многогранники и некоторые другие геометрические фигуры.

Строгие определения понятий «длина», «площадь», «объем» могут быть даны, если отправляться от хорошо известных из практики приемов измерения. Каждая из геометрических величин вводится по определению как некоторое вещественное число, получаемое с помощью определенной, описанной ниже, процедуры.

Нахождение численного значения данной величины называется *измерением* этой величины. Каждому известно из опыта, как производится приближенное измерение длины отрезка или дуги, величины угла, площади плоской фигуры и объема тела. Точное измерение величины возможно лишь в абстракции.

Задача настоящей главы состоит в том, чтобы формулировать математическое содержание процессов измерения основных геометрических величин, установить важнейшие свойства этих величин, обосновать известные из школьного курса формулы и вывести некоторые новые формулы для вычисления геометрических величин. Мы встретимся здесь также с описанием некоторых полезных в практике приемов измерения величин.

Мы увидим, что как в определениях, так и в свойствах *различных* величин (длина, площадь, объем, мера угла) имеется большое сходство.

§ 22. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКА

Пусть (рис. 179) AB — некоторый отрезок прямой a. Пусть на этой прямой дан еще некоторый отрезок OE, который мы будем называть базисом измерения (этот отрезок часто называют также единицей измерения).

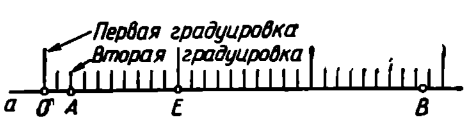


Рис. 179.

Представим себе, что от точки O откладываются в обе стороны последовательно отрезки, равные OE, до тех пор, пока соединение таких отрезков не покроет отрезок AB[1]. Полученные таким образом точки будем называть точками первой градуировки, а отрезки, ограниченные каждыми двумя соседними точками градуировки,— отрезками первой градуировки.

[1]Возможность такого построения вытекает из известной аксиомы Архимеда.

Число n_1 отрезков первой градуировки, целиком лежащих на отрезке AB, назовем **первым приближением к длине отрезка AB по недостатку**[1]. На рисунке 179 $n_1=1$.

Число N_1 отрезков первой градуировки, содержащих хотя бы одну внутреннюю точку отрезка AB, назовем **первым приближением к длине отрезка AB по избытку**. На рисунке 179 $N_1=3$.

Если концы A и B данного отрезка окажутся точками первой градуировки, то, понятно, $n_1=N_1$. Это общее значение приближений по недостатку и по избытку назовем тогда *длиною* отрезка AB. Если этого не случится, то разделим отрезок AB на 10 равных частей. Так же, как из отрезка OE, образуем теперь из десятой его доли *вторую градуировку* прямой a. Если n_2 — число отрезков второй градуировки, лежащих всеми своими точками на отрезке AB, то число $\frac{n_2}{10}$ назовем **вторым приближением к длине отрезка AB по недостатку**. Вторым приближением **по избытку** назовем число $\frac{N_2}{10}$, где N_2 — число отрезков второй градуировки, содержащих хотя бы одну внутреннюю точку отрезка AB. На рисунке 179 $n_2=26$, $N_2=27$.

Если окажется, что $n_2=N_2$, то назовем длиной отрезка AB число $\frac{n_2}{10}=\frac{N_2}{10}$. Если же $n_2\neq N_2$, то образуем тем же способом третью градуировку из сотых долей единичного отрезка.

Представим себе, что описанный процесс продолжается неограниченно[2]. Тогда возникают последовательные приближения к длине отрезка AB по недостатку:

$$n_1,\ \frac{n_2}{10},\ \frac{n_3}{10^2},\ \ldots,\ \frac{n_i}{10^{i-1}},\ \ldots \qquad \text{(I)}$$

и по избытку:

$$N_1,\ \frac{N_2}{10},\ \frac{N_3}{10^2},\ \ldots,\ \frac{N_i}{10^{i-1}},\ \ldots \qquad \text{(II)}$$

Ясно, что $n_{i+1}\geqslant 10n_i$. Следовательно,

$$n_1\leqslant\frac{n_2}{10}\leqslant\frac{n_3}{10^2}\leqslant\ldots,$$

---

[1] Не следует смущаться тем, что, не располагая еще понятием *длины отрезка*, мы уже используем понятие *приближения к длине*: это — другое понятие, которое можно ввести и ранее.

[2] Возможность такого случая следует из существования несоизмеримых отрезков. В школьном курсе доказывается обычно, что сторона квадрата несоизмерима с его диагональю. Поэтому если OE равняется стороне квадрата, а AB — его диагонали, то возникает именно такой случай. Впрочем, упомянутый процесс может оказаться бесконечным и в некоторых случаях, когда отрезки OE и OB соизмеримы.

то есть последовательность (I) неубывающая. Кроме того, нетрудно заметить, что $n_i \leqslant 10^{i-1} N_1$, то есть $\frac{n_i}{10^{i-1}} \leqslant N_1$, так что последовательность (I) ограничена сверху.

Из приведенных здесь соображений вытекает, как известно, что последовательность приближений к длине отрезка по недостатку имеет предел, т. е. что существует $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{n_i}{10^{i-1}} = d_1$.

Аналогичные рассуждения приведут нас к выводу, что

$$1)\ N_{i+1} \leqslant 10N_i \text{ и } 2)\ \frac{N_i}{10^{i-1}} \geqslant n_1,$$

откуда следует, что существует

$$\lim_{i\to\infty} \frac{N_i}{10^{i-1}} = d_2.$$

А так как, очевидно, $N_i - n_i \leqslant 2$, то $\frac{N_i - n_i}{10^{i-1}} \leqslant \frac{2}{10^{i-1}}$. Следовательно, $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{N_i - n_i}{10^{i-1}} = 0$, так что $d_1 = d_2$.

Число
$$d = \lim_{i\to\infty} \frac{n_i}{10^{i-1}} = \lim_{i\to\infty} \frac{N_i}{10^{i-1}},$$

т. е. общий предел приближений по недостатку и по избытку называется д л и н о й отрезка AB относительно базиса OE. Будем обозначать её так: $d = (AB)_{OE}$. В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, можно употреблять и более краткие обозначения длины: (AB) или AB.

Непосредственно из установленного определения следует, что $(OE)_{OE} = 1$. Очевидно также, что длина каждого отрезка первой градуировки равна $\frac{1}{10}$, каждого отрезка второй градуировки равна $\frac{1}{100}$ и т. д.

§ 23. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЛИНЫ ОТРЕЗКА

Исходя из определения длины отрезка, можно вывести следующее свойство этого понятия.

1. Свойство а д д и т и в н о с т и: *если отрезок* $\tilde{a}$ *является соединением конечного числа отрезков* $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_k$, *без общих внутренних точек, то длина* a *отрезка* $\tilde{a}$ (*относительно некоторого выбранного базиса*) *равна сумме* $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ *длин его частей* (*относительно того же базиса*).

Проведем доказательство для случая двух слагаемых. Оно без существенных изменений переносится на любое конечное число слагаемых.

Пусть отрезок $AB=\widetilde{a}$ разделен на два отрезка $\widetilde{a}_1$ и $\widetilde{a}_2$ точкой P. Обозначим через $n_i^{(1)}$, $n_i^{(2)}$ и n_i число отрезков i-й градуировки, принадлежащих соответственно отрезкам $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$ и $\widetilde{a}$ (на рис. 180 $n_i^{(1)}=2$, $n_i^{(2)}=2$, $n_i=4$). Тогда могут представиться три случая: 1) точка P есть точка градуировки (рис. 180). В этом случае, очевидно, $n_i=n_i^{(1)}+n_i^{(2)}$; 2) P есть внутренняя точка отрезка градуировки, принадлежащего отрезку AB (рис. 181). При этом $n_i=n_i^{(1)}+n_i^{(2)}+1$; 3) A и P (или B и P) внутренние точки одного и

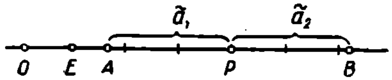


Рис. 180.

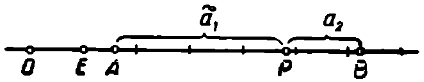


Рис. 181.

того же отрезка градуировки (рис. 182). Тогда $n_i=n_i^{(1)}+n_i^{(2)}$ (где одно из слагаемых равно нулю).

Во всех случаях число n_i можно выразить формулой:

$$n_i=n_i^{(1)}+n_i^{(2)}+n^{[i]}, \text{ где } n^{[i]} \text{ равно 0 или 1.}$$

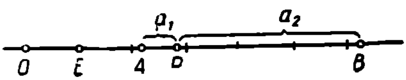


Рис. 182.

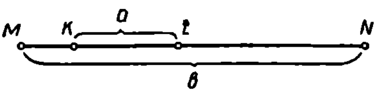


Рис. 183.

Разделим обе части последнего равенства на 10^{i-1} и перейдем к пределу при $i\to\infty$.

$$\lim_{i\to\infty}\frac{n_i}{10^{i-1}}=a,\quad \lim_{i\to\infty}\frac{n_i^{(1)}}{10^{i-1}}=a_1,\quad \lim_{i\to\infty}\frac{n_i^{(2)}}{10^{i-1}}=a_2$$

по определению длины.

$$\lim_{i\to\infty}\frac{n^{[i]}}{10^{i-1}}=0,$$

так как $0\leqslant n^{[i]}\leqslant 1$ при любом i. Следовательно, $a=a_1+a_2$, что и требовалось доказать.

2. Свойство монотонности: *если отрезок $\widetilde{a}$ принадлежит отрезку $\widetilde{b}$* (не совпадая с ним), *то* $(\widetilde{a})<(\widetilde{b})$.

Пусть (рис. 183) $\widetilde{a}\equiv KL$, $\widetilde{b}\equiv MN$. Допустим, что обе точки K и L — внутри отрезка MN. Тогда по свойству аддитивности

$$(\widetilde{b})=(\widetilde{a})+(MK)+(LN),$$

откуда ясно, что $(\widetilde{b})>(\widetilde{a})$.

Если одна из точек K или L совпадает с концом отрезка MN, то рассуждение только упростится.

Представим себе теперь, что на прямой g (рис. 184) заданы два равных отрезка OE и $O'E'$. Если измерять один и тот же отрезок AB этой прямой, принимая за единицу измерения один раз OE, а другой раз $O'E'$, то точки одноименных градуировок, вообще говоря, не будут совпадать. Однако опыт подсказывает, что результат измерения будет один и тот же. И действительно, длина отрезка обладает следующим свойством.

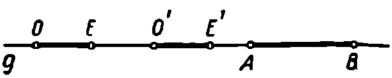


Рис. 184.

3. Свойство инвариантности: *при замене данного базиса каким-либо другим, равным ему базисом, длина отрезка не изменяется.*

Для доказательства заметим, что в измерении не будет никакой разницы, если отрезок OE укладывается в отрезке OO' целое число раз: в этом случае все точки обеих градуировок совпадают.

Если отрезок OE не укладывается в OO' целое число раз, но длина отрезка OO' выражается в десятых долях отрезка OE, то приближения к длине отрезка AB, измеренного посредством OE и $O'E'$, будут совпадать начиная со второго.

Если отрезок OO' выражается в сотых долях OE, то совпадение наступит с третьего приближения и т. д.

Таким образом, предложение 3 справедливо для случая, когда длина отрезка OO' выражается рациональным числом.

Опираясь на это и привлекая предельный переход, можно убедиться в том, что оно остается в силе и для иррационального значения (OO').

Следствие. *Равные отрезки прямой имеют равные длины относительно одного и того же произвольно выбранного базиса.*

Действительно, пусть AB и $A'B'$ — два равных отрезка одной прямой, и OE — данный базис. Переместим прямую g вдоль себя так, чтобы отрезок AB совместился с отрезком $A'B'$. Пусть при этом базис OE займет положение $O'E'$. Тогда, очевидно, $(AB)_{OE}=(A'B')_{O'E'}$.

Но $(AB)_{OE}=(AB)_{O'E'}$ в силу инвариантности. Следовательно, $(A'B')_{O'E'}= = (AB)_{O'E'}$. Но так как $O'E'=OE$, то в силу инвариантности $(A'B')_{O'E'}= = (A'B')_{OE}$ и $(AB)_{O'E'}=(AB)_{OE}$. Таким образом, $(A'B')_{OE}=(AB)_{OE}$, что и требовалось доказать.

4. *При переходе от одной единицы измерения к другой длина отрезка умножается на длину первоначальной единицы измерения относительно вновь выбранного базиса.*

Будем обозначать:

первоначальную единицу измерения через $\tilde{l}$,
новую » » » $\tilde{l}'$,
данный отрезок через $\tilde{a}$.

Обозначим также:

длину отрезка $\widetilde{a}$, измеренного единицей $\widetilde{l}$, через a,

» » $\widetilde{a}$ » » $\widetilde{l'}$ » a',

» » $\widetilde{l}$ » » $\widetilde{l'}$ » l.

Тогда надо доказать, что $a'=al$.

1-й случай: a и l целые.

В этом случае $\widetilde{a}=a\widetilde{l}$, т. е. отрезок $\widetilde{a}$ можно получить путем a-кратного последовательного откладывания отрезка $\widetilde{l}$. Но $\widetilde{l'}=l\widetilde{l'}$, так что $\widetilde{a}=(al)\widetilde{l'}$ и, значит, $a'=al$.

2-й случай: a и l рациональные.

Пусть $a=\frac{m}{n}$, $l=\frac{p}{q}$. Это означает, что

$$\widetilde{a}=m\left(\frac{\widetilde{l}}{n}\right),\quad \widetilde{l}=p\left(\frac{\widetilde{l'}}{q}\right).$$

Очевидно, можно записать $\widetilde{l}$ иначе:

$$\widetilde{l}=pn\left(\frac{\widetilde{l'}}{qn}\right),\ \text{так что}\ \frac{1}{n}\widetilde{l}=p\left(\frac{\widetilde{l'}}{qn}\right).$$

Поэтому $\widetilde{a}=mp\left(\frac{\widetilde{l'}}{qn}\right)$ и, следовательно, $a'=\frac{mp}{qn}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=a\cdot l$.

3-й случай: $\widetilde{a}$ рационально, l иррационально.

Пусть

$$a=\frac{p}{q}\ \text{и}\ \frac{m}{n}<l<\frac{m+1}{n}.$$

Тогда

$$\frac{mp}{nq}<\frac{lp}{q}<\frac{(m+1)p}{nq},$$

т. е.

$$\frac{mp}{nq}<al<\frac{(m+1)p}{nq}. \qquad (*)$$

С другой стороны,

$$m\left(\frac{\widetilde{l'}}{n}\right)<\widetilde{l}<(m+1)\frac{\widetilde{l'}}{n},\ \text{или}\ mq\left(\frac{\widetilde{l'}}{nq}\right)<\widetilde{l}<(m+1)q\frac{\widetilde{l'}}{nq}.$$

Очевидно, что соотношение $k\widetilde{\alpha}>k\widetilde{\beta}$ при натуральном k означает также, что $\widetilde{\alpha}>\widetilde{\beta}$. Поэтому

$$m\left(\frac{\widetilde{l'}}{nq}\right)<\frac{\widetilde{l}}{q}<(m+1)\frac{\widetilde{l'}}{nq}.$$

Отсюда

$$mp\left(\frac{\widetilde{l'}}{nq}\right)<p\frac{\widetilde{l}}{q}<(m+1)p\frac{\widetilde{l'}}{nq}.$$

Но $p\left(\frac{\widetilde{l}}{q}\right)=\widetilde{a}$, так что

$$mp\left(\frac{\widetilde{l'}}{nq}\right)<\widetilde{a}<(m+1)\,p\,\frac{\widetilde{l'}}{nq},$$

откуда в силу монотонности

$$\frac{mp}{nq}<a'<\frac{(m+1)\,p}{nq} \qquad (^{**})$$

при любом n.

Сопоставляя неравенства (*) и (**), заметим, что

$$|a'-al|<\frac{p}{nq} \text{ при любом } n.$$

Полагая $n\to\infty$, найдем, что $a'-al=0$, т. е. $a'=al$.

Таким же образом рассматривается случай, когда l рационально, a иррационально.

Последний возможный случай (a и l иррациональны) отличается только некоторым усложнением выкладок.

5. *Для всякого положительного числа m можно при выбранной единице измерения образовать отрезок, длина которого равна числу m.*

Если число m выражается конечной десятичной дробью, то искомый отрезок можно образовать посредством соответствующего геометрического построения, откладывая на некотором луче последовательно данное число целых единиц, затем данное число десятых, данное число сотых и т. д., пока не будут исчерпаны все десятичные знаки данного числа m.

В противном случае, т. е. в случае, если m не выражается конечной десятичной дробью, для доказательства свойства 5 привлекается следующая аксиома, известная под названием аксиомы Кантора: *если на прямой p дана бесконечная последовательность отрезков*

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_iB_i\ldots,$$

из которых каждый последующий принадлежит предыдущему, и если не существует отрезка, принадлежащего всем отрезкам данной последовательности, то существует одна и только одна точка X прямой p, принадлежащая всем отрезкам данной последовательности.

Рассмотрим точку O и выходящий из нее луч $\overline{l}$. Откладываем от O на $\overline{l}$ отрезки, отвечающие приближениям к числу m по недостатку и по избытку (приближения эти рациональны). Пусть OK_i и ON_i — отрезки, отвечающие i-му приближению соответственно по недостатку и по избытку. Легко заметить, что последовательность отрезков K_iN_i удовлетворяет условиям аксиомы Кантора: каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему и никакой отрезок не может принадлежать $\frac{1}{10^i}$-й доле единичного отрезка при любом i, а разность между отрезками ON_i и OK_i составляет именно $\frac{1}{10^i}$-ю долю единичного отрезка.

Пусть X — канторова точка последовательности отрезков K_iN_i. Ясно, что длина отрезка OX равна m, т. е. отрезок OX искомый.

Последнее свойство длины отрезка служит обоснованием метода координат: благодаря этому свойству координатам точки можно давать произвольные действительные значения.

После того как понятие длины отрезка определено, естественно назвать **длиной ломаной** сумму длин ее звеньев. Затем понятие **длины** криволинейной **дуги** сводится, как известно, с помощью предельного перехода к понятию длины ломаной.

Теория измерения углов может быть построена аналогично теории измерения отрезков.

§ 24. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРАКТИКЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОТРЕЗКОВ, УГЛОВ И ДУГ

1. На практике единица длины выбирается различными способами, в зависимости от характера поставленной задачи, от исторических и национальных условий.

Во многих странах для измерения длины пользовались шагом или локтем человека. В древнерусских документах встречаются упоминания об оценке расстояний по слышимости рева быка. В Японии о расстоянии на земной поверхности судили по количеству соломенных башмаков, которые износит на данном пути лошадь. В древней Греции в качестве меры длины использовалась *стадия* — путь, который может пройти человек от момента, когда солнечный диск начнет появляться над горизонтом, до момента, когда он целиком становится видимым.

В течение длительного периода времени меры такого рода уточнялись и унифицировались.

В начале XII в. в Англии в качестве одной из основных мер был принят *ярд*. В одном из распоряжений того времени ярд определялся как «расстояние от носа короля Генриха I до конца среднего пальца вытянутой его руки» (по современным нормативам 1 ярд=0,914400 *м*). Этой единицей еще и сейчас пользуются в Англии.

С XIV в. были узаконены две английские меры длины: 1) *дюйм* (голландское — «палец»), определяемый первоначально как длина сустава большого пальца мужской руки, а позднее — как «длина трех ячменных зерен, вынутых из середины колоса»; 2) *фут* (английское — «ступня») — средняя длина человеческой ступни (по закону того времени — «одна шестнадцатая длины ступней шестнадцати человек, выходящих из церкви в воскресенье»). Считалось, что фут содержит

12 дюймов. В настоящее время 1 фут принимается равным 0,3048 *м*, а 1 дюйм — 25,400 *мм*.

Ярд, фут, дюйм до сих пор используются в Англии, США, Канаде и некоторых других странах. Принята следующая зависимость между этими единицами: 1 ярд равен 3 футам, 1 фут равен 12 дюймам. Для измерения больших расстояний в Англии, а затем и в других странах стали пользоваться единицей 1 *миля*. Этой единице длины придают различный смысл. Морской милей стали называть среднюю длину 1 минуты земного меридиана ($\approx$ 1852 *м*). Английская уставная миля равна 1609,34 *м*. Встречается также понятие географической мили и др. Известно около 50 различных «миль» и более десятка различных «футов» (рабочий, математический, геометрический и др.).

Основной русской мерой длины долгое время был *аршин*, название которого происходит от персидского слова «арш» — локоть. Длина в три аршина получила наименование *сажень*. Петр I положил считать, что одна сажень равна 7 футам. Для измерения больших расстояний в России употреблялась *верста* ($\approx$ 1,0668 *км*).

Чрезвычайное обилие различных единиц измерения в каждой стране, сложность вычислений, связанных с переходом от одной единицы измерения к другой, отсутствие международных единиц измерения, громоздкая зависимость между единицами измерения различных величин (например, между единицами измерения длин, площадей и объемов) — все это мешало развитию промышленности и торговли и вызывало необходимость упрощения системы измерения и установления необходимых международных соглашений.

В настоящее время почти во всех странах мира пользуются преимущественно *метрической системой мер* (основная единица длины — один *метр*), введенной впервые во Франции в эпоху французской революции 1789 г. Первоначально понятие метра было связано с тщательными геодезическими измерениями: он полагался равным одной десятимиллионной части четверти парижского меридиана. Впоследствии эта мера была воплощена в нескольких строго хранимых образцах — *эталонах*. Но и эталон может под влиянием различных причин претерпевать деформацию. Кроме того, концевые штрихи на эталоне имеют некоторую ширину, из-за чего измерение с помощью эталона всегда дает некоторую погрешность. Поэтому стремятся указать такую постоянную единицу измерения, которая имеется в природе и может быть получена экспериментальным путем. В качестве такой единицы условились принимать длину волны красной линии спектра кадмия при определенных дополнительных условиях относительно влажности и состава воздуха, его температуры и давления, ускорения силы тяжести и других факторов. Эту единицу обозначают так: λ_{cdr}.

Условились считать, что

$$1\ м = 1\,553\,164,13\lambda_{cdr}.$$

Несмотря на стремление к единообразию, для удовлетворения потребностей науки и техники приходится все же и в настоящее время использовать разнообразные единицы длины.

Для технических нужд особенно часто используется в качестве единицы измерения 1 *мм* $\left(1\ мм = \frac{1}{1000}\ м\right)$, а для измерения отклонений от допускаемых норм и более мелкие единицы:

$$1\ \textit{микрон}\ \left(1\ мк = \frac{1}{1000}\ мм = 10^{-6}\ м\right)$$

и 1 *миллимикрон*, или *нанометр* $\left(1\ ммк = 1\ нм = \frac{1}{1000}\ мк = 10^{-9}\ м\right)$.

В некоторых разделах физики (например, в оптике) встречаются единицы:

$$1\ \textit{ангстрем}\ \left(1\text{Å} = 10^{-12}\ м\right)$$

$$\text{и } 1\ \textit{икс}\ (1x = 10^{-13}\ м).$$

Эти единицы используются, например, для измерения длин волн световых лучей.

В астрономии, где приходится иметь дело с огромными расстояниями, используются, естественно, иные единицы длины: астрономическая единица, выражающая среднее расстояние от Земли до Солнца и составляющая приблизительно $149{,}6 \cdot 10^6$ *км*; световой год, т. е. путь, который проходит луч света за один год, равный примерно $946 \cdot 10^{10}$ *км*; 1 *парсек* или *параллакс-секунда* (*пс*) — расстояние от центра Земли до такой точки, из которой радиус Земли виден под углом в 1″:

$$1 пс \approx 3{,}25 \text{ световых лет} \approx 30{,}8 \cdot 10^{12}\ км.$$

Для перехода от русских мер к метрическим или обратно можно пользоваться следующими приближенными соотношениями:

1 аршин равен 70 сантиметрам,
1 метр равен 1,4 аршина.

2. Для измерения углов употребительны две различные единицы измерения: *градус* (°) и *радиан*. Как известно, градус содержит 60 *минут*, минута содержит 60 *секунд*.

1 радиан составляет приблизительно 57°17′45″ или 206 265″.

1 градус равен приблизительно 0,01745 радиан[1].

---

[1] Интересно отметить, что градусное измерение исторически сложилось на базе радианного. В древнем Вавилоне считали, что радиус укладывается в окружность шесть раз. А так как вавилоняне пользовались шестидесятеричной системой счисления, то далее естественно возникло деление окружности на $60 \cdot 6 = 360$ градусов, а затем таким же путем на минуты и секунды.

Ввиду преимуществ десятичной системы мер иногда (особенно в геодезии) для измерения углов пользуются единицей, которая составляет $\frac{1}{100}$ часть прямого угла и называется 1 *гон*.

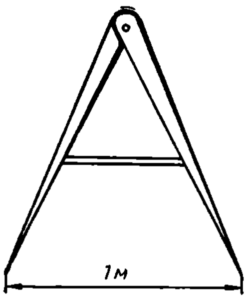


Рис. 185.

В некоторых случаях удобно делить полный угол не на 360, а на 1000 равных частей. В связи с этим за единицу измерения угла принимают о д н у т ы с я ч н у ю. Ясно, что одна тысячная полного угла равна 0,36°.

3. Практически каждое измерение отрезка, угла или дуги производится посредством каких-либо инструментов или приборов. Выбор для измерения того или иного инструмента или прибора зависит от условий измерения: от того, что именно измеряется; от средств, которыми располагают для измерения; от требований, предъявляемых к точности измерения, и т. п.

Иногда расстояния на местности измеряют шагами или пользуются глазомерной оценкой этого расстояния.

В практике сельского хозяйства пользуются п о л е в ы м ц и р к у л е м, изображенным на рисунке 185. В походах употребляют разного рода ш а г о м е р ы, т. е. счетчики числа шагов. Путь, пройденный мототранспортом, отсчитывается на спидометре.

Бо́льшую точность при измерении расстояний дают рулетка, мерная лента, мерная цепь и другие приспособления.

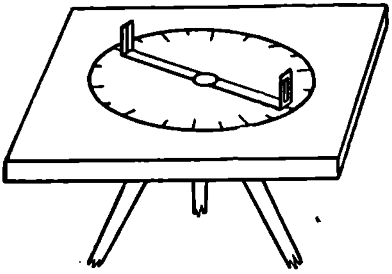


Рис. 186.

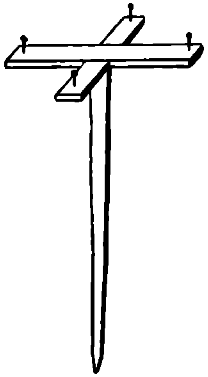


Рис. 187.

Всем известен простейший инструмент для измерения углов иа плане — т р а н с п о р т и р. Ту же роль выполняет при измерениях на местности а с т р о л я б и я, изображенная на рисунке 186. Более совершенные геодезические приборы для измерения углов называются т е о д о л и т а м и и г о н и о м е т р а м и.

Для измерения углов, лежащих в вертикальной плоскости, употребляют приборы, называемые э к л и м е т р а м и.

В школьной практике употребляется простейший прибор для построения на местности прямых углов и определения перпендикулярных направлений — э к к е р (рис. 187).

Теодолиты, эклиметры и астролябии применяются также для определения на местности недоступных расстояний.

Простейшим инструментом измерения небольших отрезков служит всем известная м а с ш т а б н а я л и н е й к а, которую удобно сочетать с измерительным циркулем. Для увеличения точности измерений посредством масштабной линейки до 0,1 *мм* пользуются так называемым п о п е р е ч н ы м м а с ш т а б о м (см. рис. 188). Правила пользования этим приспособлением известны из школьных курсов геометрии и географии.

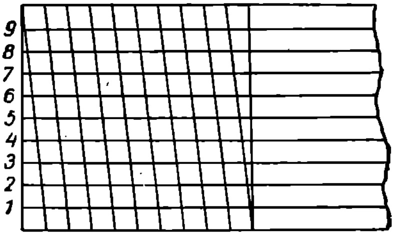


Рис. 188.

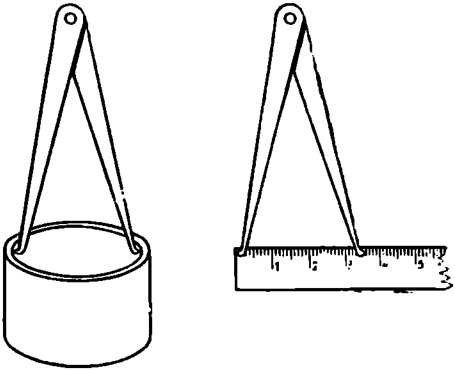


Рис. 189.

Для измерения внутренних диаметров поверхностей применяют так называемые н у т р о м е р ы (в сочетании с масштабной линейкой). Нутромер простейшего типа и способ его применения изображены на рисунке 189.

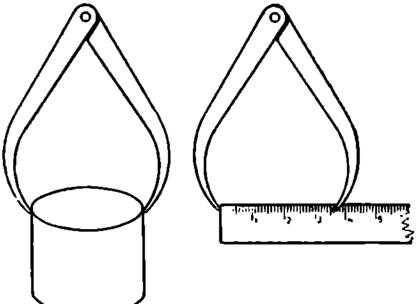


Рис. 190.

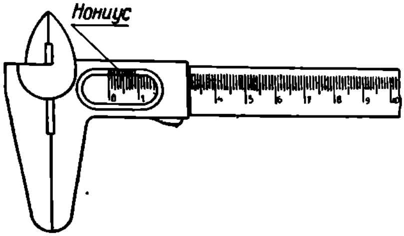


Рис. 191.

Для измерения внешних диаметров применяют к р о н ц и р к у л ь (рис. 190) или ш т а н г е н ц и р к у л ь (рис. 191), причем штангенциркуль позволяет достичь большей точности измерения.

Наиболее точные измерения отрезков малых размеров производятся посредством микрометра (рис. 192).

Точность измерений, производимых штангенциркулем или микрометром, а также астролябией или теодолитом, можно увеличить (обычно в 10 раз), если пользоваться вспомогательным приспособлением, которое называется нониусом или верньером. Описание нониуса и его применение можно найти, например, в [15], стр. 147—150.

Для измерения дуг кривых линий на плане удобно пользоваться специальным прибором, называемым курвиметром. Схема этого прибора приведена на рисунке 193. Путь, пройденный вращающимся диском, отсчитывается на специальном циферблате.

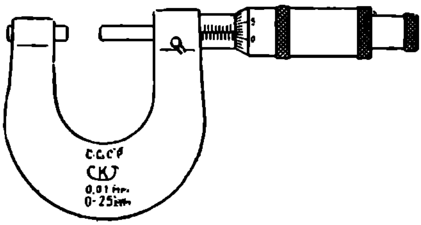


Рис. 192.

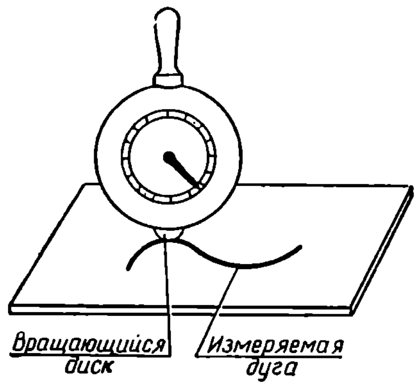


Рис. 193.

В производственных условиях для контроля размеров изготовленных деталей пользуются так называемыми мерительными плитками (или концевыми мерами). Это металлические бруски с тщательно обработанными и точно калиброванными гранями. С этой же целью употребляют приспособления, называемые предельными калибрами. Это скобы, фиксирующие наименьший и наибольший допустимые размеры той или иной детали.

В последние десятилетия появилось много разнообразных измерительных приборов, основанных на применении тех или иных физических явлений. Очень распространены рычажные измерительные приборы — индикаторы, миниметры и другие, позволяющие фиксировать самые незначительные изменения длины. Употребляются различные оптические угломеры, позволяющие с большой точностью измерять линейные и двугранные углы. Посредством прибора, называемого ротаметром, можно с точностью до 0,001 *мм* определять диаметры малых отверстий по расходу продуваемого через него воздуха. Все большее распространение получают теперь разнообразные электрические приборы, автоматизирующие процесс измерения.

§ 25. НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ

1. В школьном курсе геометрии обычно рассматривают следующие теоремы о соотношениях между элементами треугольника: теорему о высоте прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу; теорему Пифагора; теорему о квадрате стороны косоугольного треугольника; теорему об отношении, в котором биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону; теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

Считая эти предложения известными, рассмотрим некоторые другие метрические соотношения, естественным образом дополняющие школьный курс геометрии.

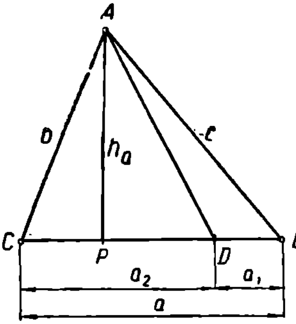


Рис. 194.

Теорема Стюарта. *Если a, b, c — стороны треугольника ABC и точка D делит сторону BC так, что $BD=a_1$, $CD=a_2$, то*

$$AD^2=\frac{a_1b^2+a_2c^2-aa_1a_2}{a}. \qquad (*)$$

Доказательство. Если P (рис. 194) — основание высоты, проведенной из вершины A, то в треугольнике ABC

$$c^2=AD^2+a_1^2-2a_1DA\cos\angle ADB,$$

а в треугольнике ACD

$$b^2=AD^2+a_2^2-2a_2DA\cos\angle ADC.$$

Умножая первое из этих равенств почленно на a_2, а второе — на a_1 и складывая полученные равенства, найдем:

$$a_2c^2+a_1b^2=a_2AD^2+a_2a_1^2+a_1AD^2+a_1a_2^2$$

$$(\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC).$$

Замечая, что $a_1+a_2=a$, перепишем это равенство иначе:

$$a_2c^2+a_1b^2=a\cdot AD^2+aa_1a_2.$$

Отсюда непосредственно следует формула Стюарта (*).

Теорема Стюарта позволяет найти выражения некоторых линейных элементов треугольника через стороны треугольника. Приведем примеры.

1) Если AD — медиана, то $a_1=a_2=\frac{a}{2}$. Поэтому

$$m_a^2=\frac{\frac{a}{2}b^2+\frac{a}{2}c^2-a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{a}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

Следовательно,

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

2) Пусть AD — биссектриса. Тогда $a_1:a_2=c:b$. Составим производную пропорцию:

$$\frac{a_1+a_2}{a_2}=\frac{b+c}{b}, \text{ или } \frac{a}{a_2}=\frac{b+c}{b},$$

откуда

$$a_2=\frac{ab}{b+c}.$$

Точно так же найдем:

$$a_1=\frac{ac}{b+c}.$$

Подставив эти выражения в формулу Стюарта и произведя необходимые упрощения, получим следующее выражение биссектрисы треугольника через его стороны:

$$\beta_A=\frac{\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}}{b+c}.$$

2. Рассмотрим теперь некоторые соотношения между элементами четырехугольника. Знаменитому древнегреческому астроному и математику Клавдию Птолемею, жившему в Александрии (Египет) во II в. н. э., принадлежит следующая теорема о четырехугольнике, вписанном в окружность.

Теорема Птолемея. *Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений противоположных его сторон.*

Доказательство. Пусть (рис. 195) около четырехугольника $ABCD$ описана окружность, причем

$$AB=a,\ BC=b,\ AD=d,\ CD=c,\ BD=f,\ AC=e.$$

Построим $\angle ABP=\angle CBD$. Тогда $\triangle ABP\backsim\triangle DBC$, так как вписанные углы BAP и BDC опираются на одну и ту же дугу. Следовательно,

$$AB:AP=BD:CD, \text{ т. е. } a:AP=f:c, \text{ или } ac=AP\cdot f. \qquad (*)$$

С другой стороны, $\angle ADB=\angle PCB$, как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу, а $\angle ABD=\angle CBP$, как состоящие из соответственно равных частей. Поэтому $\triangle ADB \backsim \triangle PCB$, откуда нетрудно заметить, что

$$bd = PC \cdot f. \qquad (**)$$

Складывая почленно равенства (*) и (**), получим:

$$ac + bd = ef,$$

что и требовалось доказать.

Из школьного курса известно, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырех сторон.

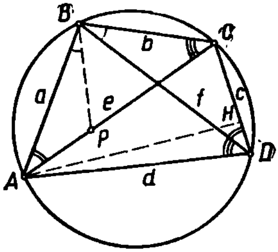


Рис. 195.

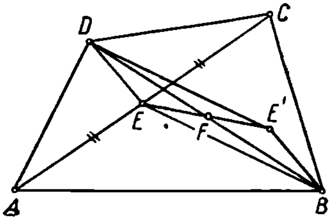


Рис. 196.

Л. Эйлеру (1707—1783) удалось доказать следующую, более общую теорему.

Теорема Эйлера о четырехугольнике. *Сумма квадратов всех сторон четырехугольника превосходит сумму квадратов его диагоналей на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.*

Доказательство. Пусть (рис. 196) $ABCD$ — произвольный четырехугольник, E — середина диагонали AC, F — середина диагонали BD.

Дополнив треугольник BDE до параллелограмма $BEDE'$, найдем:

$$2(BE)^2 + 2(DE)^2 = (2BF)^2 + (2EF)^2,$$

или

$$BE^2 + DE^2 = 2BF^2 + 2EF^2. \qquad (1)$$

Так же из треугольника ABC:

$$AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2BE^2, \qquad (2)$$

а из треугольника ACD:

$$AD^2 + CD^2 = 2AE^2 + 2DE^2. \qquad (3)$$

Складывая почленно (2) и (3), получим:

$$AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 = 4AE^2 + 2(BE^2 + DE^2) = AC^2 + 2(BE^2 + DE^2).$$

Заменяя $BE^2 + DE^2$ его выражением из равенства (1), найдем:

$$AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон, то четырехугольник есть параллелограмм.

Доказательство предлагаем читателю в качестве упражнения.

§ 26. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Рассмотрим некоторую ограниченную плоскую фигуру Ф. Пусть на той же плоскости дан некоторый квадрат $ABCD$, который мы будем называть *базисом*.

Будем проводить прямые, параллельные сторонам квадрата $ABCD$, отступая каждый раз на расстояние, равное стороне этого квадрата (см. рис. 197). Тогда на плоскостн образуется сеть (двумерных) квадратов, которую мы будем называть сетью первой градуировки.

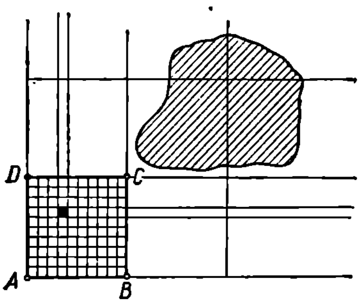


Рис. 197.

Обозначим через n_1 число квадратов первой градуировки, целиком принадлежащих фигуре Ф (на рис. 197 $n_1=0$).

Разделим каждую из сторон квадрата $ABCD$ на 10 равных частей и проведем через точки деления прямые, параллельные сторонам квадрата $ABCD$. При этом квадрат $ABCD$ разложится на 100 равных квадратов. Пользуясь одним из этих квадратов, сбразуем таким же путем, как и выше, квадратную сеть второй градуировки.

Деля каждую из сторон квадратов второй градуировки на 10 равных частей, образуем затем сеть третьей градуировки и т. д.

Обозначим через n_2 (соответственно n_3, n_4 и т. д.) число квадратов второй (соответственно третьей, четвертой и т. д.) градуировки, целиком принадлежащих фигуре Ф.

Аналогично обозначим через N_1, N_2, ... числа таких квадратов первой, второй и т. д. градуировок, которые содержат хотя бы одну точку фигуры Ф (на рисунке 197 $N_1=4$).

Числа

$$n_1, \frac{n_2}{100}, \frac{n_3}{100^2}, \dots \qquad \text{(I)}$$

будем называть соответственно первым, вторым, третьим и т. д. приближениями к площади фигуры Ф по недостатку. Числа же

$$N_1, \frac{N_2}{100}, \frac{N_3}{100^2}, \dots \qquad \text{(II)}$$

назовем первым, вторым и т. д. **приближениями** к площади фигуры Ф **по избытку**.

Ясно, что $n_{i+1} \geqslant 100 n_i$. Следовательно,

$$n_1 \leqslant \frac{n_2}{100} \leqslant \frac{n_3}{100^2} \leqslant \cdots \tag{III}$$

Аналогично приходим к выводу, что

$$N_1 \geqslant \frac{N_2}{100} \geqslant \frac{N_3}{100^2} \geqslant \cdots . \tag{IV}$$

Значит, последовательность (I) неубывающая, а последовательность (II) — невозрастающая. Далее легко заметить, что при любом $i > 1$

$$\frac{n_i}{100^{i-1}} \leqslant N_1, \quad \frac{N_i}{100^{i-1}} \geqslant n_1. \tag{V}$$

Из соотношений III — V следует, очевидно, существование пределов:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n_i}{100^{i-1}} = p \quad \text{и} \quad \lim_{i \to \infty} \frac{N_i}{100^{i-1}} = P.$$

Число p называют **внутренней площадью** (или *площадью замощения*) фигуры Ф, а число P — **внешней площадью** (*площадью покрытия*) этой фигуры. Ясно, что $p \leqslant P$, так как при любом i имеет место неравенство $n_i \leqslant N_i$. Интуитивно представляется очевидным, что на самом деле должно иметь место строгое равенство: $p = P$. Это действительно так во всех случаях, с которыми мы встречаемся в элементарной геометрии. Однако известны примеры таких фигур, для которых имеет место строгое неравенство $p < P$. Так, например, японский математик Вада построил пример ограниченной фигуры, для которой внутренняя площадь равна нулю, а внешняя — единице.

Если внутренняя площадь p фигуры равна ее внешней площади P, то общее значение S называют просто *площадью* данной фигуры *в смысле Жордана* — по имени французского математика Камилла Жордана (1838—1922), впервые изложившего в прошлом веке приведенный здесь подход к определению понятия площади. О самой фигуре Ф говорят в этом случае, что она имеет площадь (в смысле Жордана) или что она квадрируема (в смысле Жордана). Площадь фигуры Ф будем обозначать символом (Ф).

Пример. Рассмотрим вопрос о существовании и измерении площади прямоугольника, стороны которого соответственно параллельны сторонам основного квадрата.

Будем считать, что сторона основного квадрата (базиса измерения) равна единице и пусть (рис. 198)

$$(PQ) = a, \quad (PR) = b.$$

Линии квадратной решетки образуют градуировку на отрезках PQ и PR.

Пусть a_i — число отрезков i-й градуировки, целиком лежащих на отрезке PQ, A_i — число отрезков прямой PQ, образуемых линиями этой же градуировки и имеющих с отрезком PQ хотя бы одну общую внутреннюю точку.

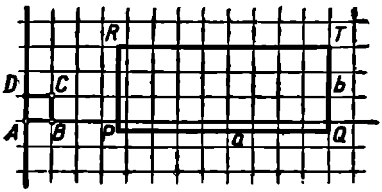


Рис. 198.

Обозначим соответственно через b_i и B_i числа, подсчитываемые таким же образом по отрезку PR.

При этом

$$A_i \leqslant a_i+2; \; B_i \leqslant b_i+2$$

(на рисунке $a_1=8$, $A_1=9$)
$b_1=3$, $B_1=4$).

Ясно, что

$$n_i=a_ib_i, \quad N_i=A_iB_i.$$

Значит,

$$\frac{N_i-n_i}{100^{i-1}}=\frac{A_iB_i-a_ib_i}{100^{i-1}} \leqslant \frac{(a_i+2)(b_i+2)-a_ib_i}{100^{i-1}}=$$

$$=\frac{2}{10^{i-1}}\cdot\frac{a_i+b_i+2}{10^{i-1}} \leqslant \frac{2}{10^{i-1}}\left(a+b+\frac{2}{10^{i-1}}\right).$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{N_i-n_i}{100^{i-1}}=0$, т. е. прямоугольник, стороны которого параллельны линиям квадратной сети, квадрируем.

По определению длины

$$\frac{a_i}{10^{i-1}} \leqslant a \leqslant \frac{A_i}{10^{i-1}} \quad \text{и} \quad \frac{b_i}{10^{i-1}} \leqslant b \leqslant \frac{B_i}{10^{i-1}}.$$

Следовательно, $\frac{a_ib_i}{100^{i-1}} \leqslant ab \leqslant \frac{A_iB_i}{100^{i-1}}$, и поэтому число ab есть общий предел приближений $\frac{n_i}{100^i}$ и $\frac{N_i}{100^i}$, т. е. площадь прямоугольника

$$S=ab.$$

§ 27. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КВАДРИРУЕМОСТИ ПРОСТЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Согласно § 25 условие квадрируемости плоской фигуры состоит в том, что предел отношения $\frac{N_i-n_i}{100^{i-1}}$ при $i\to\infty$ равен нулю.

Для решения вопроса о квадрируемости той или иной плоской фигуры надо поэтому оценить число $\mu_i=N_i-n_i$, т. е. число квадратов i-й градуировки, учтенных в N_i, но не учтенных в n_i, другими словами число квадратов, содержащих как точки, принадлежащие данной фигуре, так и точки, не принадлежащие этой фигуре. Иначе говоря, число μ_i есть число квадратов i-й градуировки, пересекающих границу фигуры, т. е. содержащих внутри себя хотя бы одну точку этой границы.

Граница многоугольника состоит из конечного числа отрезков. Поэтому для решения вопроса о квадрируемости многоугольников надо прежде всего оценить число квадратов, пересекающих прямолинейный отрезок[1].

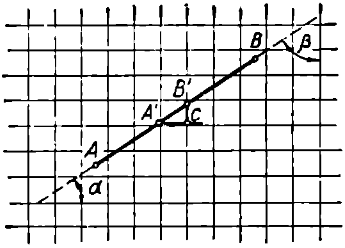


Рис. 199.

Пусть отрезок AB длины l проходит через внутренние точки k вертикальных полос квадратной сети, составленной из квадратов со стороной a.

Из двух углов α и β, которые отрезок образует с линиями сети, по крайней мере один не превышает 45°. Положим ради определенности, что $\alpha \leqslant 45°$, где α — угол, образуемый отрезком с горизонтальными линиями сети. Тогда $B'C \leqslant A'C = a$ (см. рис. 199). Это означает, что в пределах каждой полосы отрезок AB не может пересечь более двух квадратов. Значит, число всех квадратов сети, пересекаемых отрезком, $\mu \leqslant 2k$.

Ясно, что $l \geqslant a(k-2)$. Отсюда следует, что $k \leqslant \frac{l}{a} + 2$.

А так как по доказанному $\mu \leqslant 2k$, то

$$\mu \leqslant 2\frac{l}{a} + 4.$$

Теперь доказательство квадрируемости простых многоугольников не составляет никакого труда. Для каждой стороны многоугольника

$$\mu_i \leqslant 2\frac{l}{a_i} + 4,$$

где сторона квадрата i-й градуировки $a_i = \frac{1}{10^i}$. Значит,

$$\mu_i \leqslant 2\frac{l}{\frac{1}{10^i}} + 4, \quad \mu_i \leqslant 2l \cdot 10^i + 4, \quad \frac{\mu_i}{100^i} \leqslant \frac{2l}{10^i} + \frac{4}{100^i},$$

---

[1] Здесь, а также при написании § 28, 29, 31 и 32 этой главы мы воспользовались некоторым материалом, любезно предоставленным нам в рукописи В. Л. Рабиновичем. В частности, ему принадлежат приведенные здесь приемы оценки числа клеток масштабной сети, пересекаемых отрезком или многоугольником.

откуда ясно, что

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\mu_i}{100^i}=0.$$

А так как число сторон многоугольника конечно, то такое соотношение будет иметь место и для числа μ, подсчитанного для всей границы многоугольника, что и требовалось доказать.

§ 28. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Остановимся на важнейших свойствах площади плоской фигуры, которые вытекают из принятого определения этого понятия.

1. Аддитивность. *Если фигура* Φ *есть соединение конечного числа квадрируемых фигур*

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \ldots,\ \Phi_k,$$

не имеющих попарно общих внутренних точек, то фигура Φ *квадрируема и*

$$(\Phi)=(\Phi_1)+(\Phi_2)+\ldots+(\Phi_k).$$

Действительно, так как граница фигуры Φ есть часть объединения границ всех фигур Φ_j, то

$$\mu_i\leqslant\mu_i^{(1)}+\mu_i^{(2)}+\ldots+\mu_i^{(k)},$$

где $\mu_i^{(j)}$ — число квадратов i-й сети градуировки, пересекающих границу фигуры Φ_j.

Деля μ_i на 100^i и переходя к пределу при $i\to\infty$, получим: $\lim\frac{\mu_i}{100^i}=0$; вместе с этим доказана квадрируемость фигуры Φ.

С другой стороны, ясно, что

$$n_i=n_i^{(1)}+n_i^{(2)}+\ldots+n_i^{(k)}+n^{[i]},$$

где $n^{[i]}$ — число квадратов i-й градуировки, лежащих целиком внутри Φ и пересекаемых границами фигур Φ_j. Понятно, что

$$n^{[i]}\leqslant\mu_i^{(1)}+\mu_i^{(2)}+\ldots+\mu_i^{(k)},$$

так как в числах $\mu_i^{(j)}$ учитываются также квадраты, пересекающие границу фигуры Φ. Поэтому $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{n^{[i]}}{100^i}=0.$

А так как

$$\frac{n_i}{100^i}=\frac{n_i^{(1)}}{100^i}+\ldots+\frac{n_i^{(k)}}{100^i}+\frac{n^{[i]}}{100^i}\quad\text{и}\quad\lim_{i\to\infty}\frac{n_i^{(j)}}{100^i}=(\Phi_j),$$

то $(\Phi)=\sum\limits_{j=1}^{k}(\Phi_j)$.

2. Монотонность. *Если квадрируемая фигура A лежит внутри квадрируемой фигуры B, то $(A) < (B)$.*

Действительно, разность k между фигурой B и фигурой A без ее границы квадрируема, так как ее граница есть соединение границ квадрируемых фигур A и B (см. рис. 200). По аддитивному свойству площади

$$(B) = (A) + (B \setminus A),$$

откуда ясно, что $(B) > (A)$, так как площадь фигуры есть число положительное.

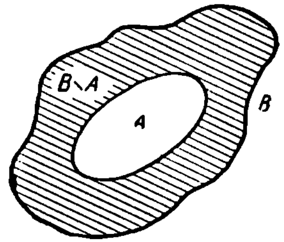


Рис. 200.

3. Инвариантность. *Если фигура Φ квадрируема относительно базиса* **Б**, *то она квадрируема также относительно базиса* **Б'**, *образуемого из* **Б** *произвольным движением, и имеет относительно обоих базисов одну и ту же площадь.*

Для доказательства этого свойства понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если для фигуры Φ можно образовать такие две последовательности квадрируемых областей $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$, что каждая $A_k \supset \Phi \supset B_k$, причем $\lim\limits_{k\to\infty}[(A_k) - (B_k)] = 0$, то площадь (Φ) фигуры Φ существует и*

$$(\Phi) = \lim_{k\to\infty}(A_k) = \lim_{k\to\infty}(B_k).$$

Доказательство леммы. Пусть $C_k = A_k \setminus B_k$. Как уже было отмечено выше, такая фигура C_k квадрируема и, в силу аддитивности, $(C_k) = (A_k) - (B_k)$, откуда, по условию, $\lim\limits_{k\to\infty}(C_k) = 0$.

Очевидно, C_k содержит границу фигуры Φ. Поэтому

$$\mu_i \leqslant N_i^{(C_k)}, \quad \frac{\mu_i}{100^i} \leqslant \frac{N_i^{(C_k)}}{100^i}, \quad \lim_{i\to\infty}\frac{\mu_i}{100^i} \leqslant (C_k)$$

при любом k, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\mu_i}{100^i} = 0$, Φ квадрируема.

В силу монотонности $(B_k) \leqslant (\Phi) \leqslant (A_k)$ при любом k, откуда по условию леммы вытекает, что

$$(\Phi) = \lim_{k\to\infty}(A_k) = \lim_{k\to\infty}(B_k).$$

Доказательство инвариантности площади проведем сначала для случая параллельного переноса базиса, а затем, для произвольного его движения.

1) Случай параллельного переноса базиса

Для квадрата, стороны которого параллельны сторонам базиса, инвариантность следует из того, что площадь такого квадрата, согласно приведенному выше примеру, равна a^2, где a — длина его стороны.

Вместо того чтобы представлять себе, что базис **Б** преобразуется посредством параллельного переноса в базис **Б'**, а фигура Φ остается неизменной, удобнее представлять себе, что базис **Б** остается неизменным, а фигура Φ посредством параллельного переноса преобразуется в некоторую фигуру Φ'.

Пусть, как и ранее, фигура Ф содержит n_i квадратов i-й градуировки и покрывается N_i квадратами этой градуировки, так что

$$\frac{n_i}{100^i} \leqslant (\Phi) \leqslant \frac{N_i}{100^i}.$$

Подвергнем базис Б (а с ним и всю сеть градуировки) тому же параллельному переносу, которому подверглась фигура Ф. В результате этого переноса получим новый базис $\overline{\text{Б}}$. Совокупность из n_i' и соответственно N_i' квадратов перемещенной сети удовлетворяет условиям леммы относительно фигуры Ф$'$. С другой стороны, ясно, что $n_i' = n_i$ и $N_i' = N_i$, т. е. что числа n_i и N_i будут иметь для фигуры Ф$'$ относительно базиса $\overline{\text{Б}}$ соответственно те же значения, что и для фигуры Ф относительно данного базиса Б. Следовательно, фигура Ф$'$ квадрируема относительно базиса $\overline{\text{Б}}$, причем

$$(\Phi')_{\overline{\text{Б}}} = (\Phi)_{\text{Б}}. \qquad (*)$$

А так как площади квадратов перемещенной сети относительно $\overline{\text{Б}}$ соответственно те же, что и относительно Б, то

$$(\Phi')_{\overline{\text{Б}}} = (\Phi')_{\text{Б}}. \qquad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что $(\Phi)_{\text{Б}} = (\Phi')_{\text{Б}}$, что и требовалось доказать.

2) Случай произвольного движения базиса

а) Для квадрата. Пусть (рис. 201) квадрат $ABCD$ произвольным образом переместился в положение $A'B'C'D'$.

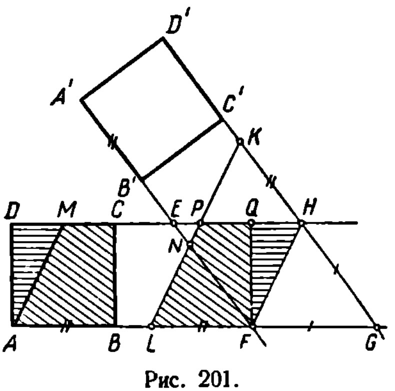


Рис. 201.

Пусть прямые AB и CD, пересекаясь с прямыми $A'B'$ и $C'D'$, образуют ромб $EFGH$.

Строим на прямой GH, как указано на рисунке, отрезок $HK = AB$, а на прямой GF — отрезок FL, также равный AB.

Так как $GF = GH$ и $FL = HK$, то $KL \parallel HF$.

Проводим через A прямую, параллельную KL, и пусть она пересекает прямую CD в точке M. Строим еще $FQ \perp CD$. Тогда треугольник ADM равен треугольнику FQH (по катету и острому углу) и трапеция $AMCB$ равна трапеции $LPQF$, где P — точка пересечения прямых CD и KL.

Теперь ясно, что квадрат $ABCD$ и параллелограмм $LPHF$ равносоставлены[1] и части их преобразуются соответственно одна в другую параллельным переносом. Следовательно, в силу аддитивности площади

$$(ABCD) = (LPHF).$$

Аналогично можно заметить, что $(A'B'C'D') = (NKHF)$, где N — точка пересечения прямых KL и $A'B'$.

Но $(LPHF) = (NKHF)$, так как трапеция $NPHE$ — общая часть этих параллелограммов, а треугольники LNF и PHK образуются один из другого параллельным переносом

[1] О понятии равносоставленности см. стр. 173.

Сопоставляя три последние равенства, приходим к искомому результату:

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

б) Для произвольной квадрируемой фигуры. Пусть произвольная фигура Ф после некоторого движения преобразовалась в фигуру Ф'. Подвергием базис Б этому же перемещению, и пусть он преобразуется в базис Б'. Ясно, что числа n_i и N_i, подсчитанные для фигуры Ф относительно базиса Б, будут теми же, что и числа n_i' и N_i', подсчитанные для Ф' относительно Б'.

Фигуры $\Phi_1'^{(i)}$ и $\Phi_2'^{(i)}$, образуемые n_i' квадратами преобразованной сети, объемлемыми границей фигуры Ф' и соответственно N_i' квадратами, ее объемлющими, удовлетворяют относительно фигуры Ф' условиям предыдущей леммы. Следовательно,

$$(\Phi') = \lim_{i\to\infty}(\Phi_1'^{(i)}) = \lim_{i\to\infty}(\Phi_2'^{(i)})$$

относительно любого базиса.

Но как $\Phi_1'^{(i)}$, так и $\Phi_2'^{(i)}$ разлагаются на квадраты, и площадь каждой из этих фигур по аддитивности равна сумме площадей этих квадратов. Площади упомянутых квадратов относительно первоначального базиса, согласно предыдущему случаю, те же, что и площади соответственных квадратов первоначальной сети. Соответственные же квадраты первоначальной сети соответственно в том же числе образуют фигуры $\Phi_1^{(i)}$ и $\Phi_2^{(i)}$, площади которых суть приближения к Ф по недостатку и по избытку. Их общий предел и есть площадь фигуры Ф. Итак,

$$(\Phi')_Б = (\Phi)_Б,$$

что и требовалось доказать.

§ 29. ПЛОЩАДИ НЕКОТОРЫХ ФИГУР

Мы уже нашли, что площадь прямоугольника выражается числом ab, где a и b — длины сторон прямоугольника.

Из инвариантности и аддитивности следует, что площади фигур, состоящих из соответственно равных частей, равны.

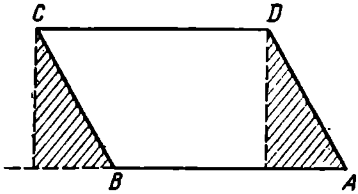


Рис. 202.

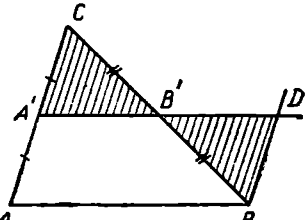


Рис. 203.

Из этих соображений легко определяется площадь параллелограмма и треугольника. Площадь параллелограмма можно вычислить, «перекраивая» его в прямоугольник (рис. 202), стороны которого равны соответственно основанию и высоте данного параллело-

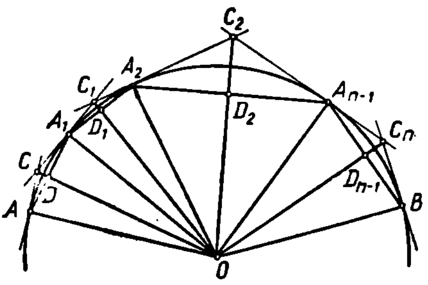


Рис. 204.

грамма[1]. Треугольник ABC (рис. 203) можно «перекроить» в параллелограмм $AA'DB$, имеющий то же основание и вдвое меньшую высоту.

Площадь произвольного простого многоугольника можно найти, разрезая его на треугольники.

Остановимся еще на вопросе об определении площади круга и его частей.

Рассмотрим круговой сектор OAB. Пусть $AA_1 \ldots A_{n-1}B$ какая-либо простая ломаная, вписанная в дугу сектора OAB, $ACC_1 \ldots C_{n-1}B$ — описанная ломаная, составленная касательными к окружности, проведенными в вершинах вписанной ломаной (рис. 204).

Простые многоугольники $OAA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$ и $OACC_1 \ldots C_{n-1}B$ квадрируемы. Обозначим:

$$(OAA_1 \ldots A_{n-1}B) = s_n, \quad (OACC_1 \ldots C_{n-1}B) = S_n,$$

$$S_n - s_n = \sigma_n.$$

Тогда

$$\sigma_n = (ACA_1) + (A_1C_1A_2) + \ldots + (A_{n-1}C_{n-1}B) = \frac{1}{2}(AA_1)(CD) +$$

$$+ \frac{1}{2}(A_1A_2)(C_1D_1) + \ldots + \frac{1}{2}(A_{n-1}B)(C_{n-1}D_{n-1}).$$

Если H — наибольшая из высот C_iD_i всех треугольников $A_iC_iA_{i+1}$, например, высота треугольника $A_kC_kA_{k+1}$, то $\sigma_n \leqslant \frac{1}{2}Hp_n$, где p_n — периметр вписанной ломаной $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$.

Пусть $n \to \infty$ при условии, что каждая сторона $A_{i-1}A_i$ вписанной ломаной неограниченно уменьшается. Тогда $H \to 0$, так как

$$H = \frac{1}{2}A_kA_{k+1} \operatorname{tg} \angle C_kA_kD_k, \text{ где } A_kA_{k+1} \to 0, \ \angle C_kA_kD_k \to 0.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Согласно лемме § 27, из предыдущих рассуждений следует, что сектор OAB квадрируем и его площадь равна:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

---

[1] Если вершина D проектируется не на сторону AB, а на ее продолжение, то для «перекраивания» параллелограмма $ABCD$ в прямоугольник надо проводить перпендикуляры на противоположную сторону из вершин B и C.

Но $S_n = \frac{1}{2} RP_n$, так что $(OAB) = \frac{1}{2} R \lim\limits_{n\to\infty} P_n$. Отсюда, между прочим, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ существует:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{2(OAB)}{R}.$$

Этот предел называют *длиной дуги* AB и обозначают $\smile AB$. Итак, площадь кругового сектора OAB равна:

$$\frac{1}{2} R \cdot \smile AB.$$

Если вписанная ломаная замкнута, то получаем формулу для площади круга:

$$(\omega) = \frac{1}{2} RL,$$

где L — длина окружности.

В другой форме: $(\omega) = \frac{L}{2R} \cdot R^2$.

Как известно, $L : 2R$ есть постоянное число, обозначенное через π. Следовательно,

$$(\omega) = \pi R^2.$$

§ 30. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРАКТИЧЕСКИХ ПРИЕМАХ НАХОЖДЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

1. На практике площадь плоской фигуры может быть найдена, разумеется, только приближенно с той или иной доступной точностью.

Для нахождения площади правильного многоугольника его разлагают на равные треугольники, соединяя центр с вершинами, находят каким-либо способом площадь одного из них и умножают ее на число сторон.

Произвольный многоугольник можно разложить на прямоугольные треугольники и прямоугольные трапеции (рис. 205).

Площадь области, ограниченной криволинейным контуром $AmBn$ (рис. 206), находят как разность площадей «криволинейных трапе-

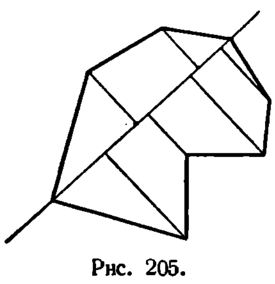


Рис. 205.

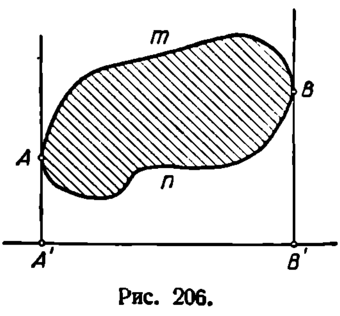


Рис. 206.

ций» $A'AmBB'$ и $A'AnBB'$, где $A'B'$ — произвольная прямая, AA' и BB' — касательные к границе области, перпендикулярные к прямой $A'B'$.

Для приближенного нахождения площади «криволинейной трапеции» можно применить «метод прямоугольников» или «метод трапеций».

Метод прямоугольников состоит в следующем. Делим отрезок $A'B'$ на n равных частей (рис. 207). В точках деления проводим перпендикуляры к прямой $A'B'$. Из точки пересечения каждого перпендикуляра с контуром проводим прямую, параллельную прямой $A'B'$, до пересечения со следующим перпендикуляром. Заменяя искомую площадь суммой площадей образованных таким образом прямоугольников, получаем:

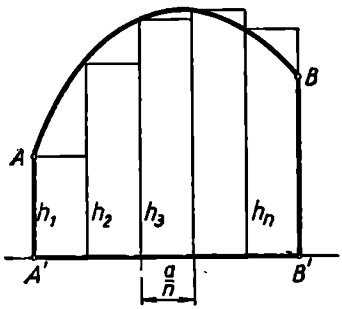


Рис. 207.

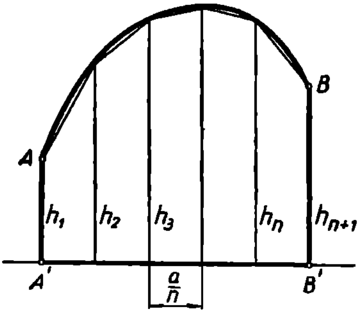


Рис. 208.

$$S \approx \frac{a}{n} h_1 + \frac{a}{n} h_2 + \ldots + \frac{a}{n} h_n = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i,$$

где $a = (A'B')$, h_i — высоты прямоугольников.

Метод трапеций сходен с методом прямоугольников. Так же, как и там, отрезок $A'B'$ делится на n равных частей и в точках деления проводятся перпендикуляры к прямой $A'B'$ (рис. 208). Точки пересечения этих перпендикуляров с границей определяемой области соединяются последовательно, в результате чего образуется n прямоугольных трапеций, сумма площадей которых дает приближенное выражение площади криволинейной трапеции:

$$S \approx \frac{a}{n}\left(\frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{h_2 + h_3}{2} + \ldots + \frac{h_n + h_{n+1}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{n}\left(\frac{h_1 + h_{n+1}}{2} + \sum_{i=2}^{n} h_i\right).$$

2. Для разложения на части многоугольника или криволинейной трапеции, заданных на местности, можно пользоваться эккером, астролябией или теодолитом. Нужные расстояния можно измерить рулеткой или мерной лентой.

Простейшим инструментом для нахождения площади фигуры, нанесенной на план, является *палетка* (рис. 209). Это масштабная сеть, нанесенная на прозрачную пленку. Ее накладывают на данную фигуру и складывают число квадратов, расположенных внутри фигуры, с половиной числа квадратов, поместившихся внутри данной фигуры частично.

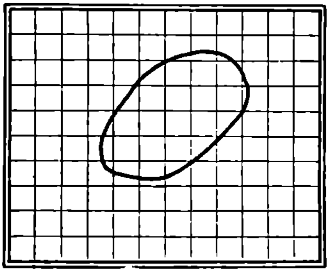


Рис. 209.

Более точные результаты дают специальные приборы для измерения площадей плоских фигур, называемые *планиметрами*.

Простейший планиметр, называемый *планиметром-топориком*, имеет вид, представленный на рисунке 210. Его можно изготовить из стержня длиной 350—400 *мм* с диаметром поперечного сечения в 5—6 *мм*. Плечо BC рекомендуется делать длиной 20 *см*.

Для определения площади криволинейной фигуры отмечают (хотя бы приблизительно) ее «центр тяжести» O и соединяют его с какой-либо точкой M контура (рис. 211). Поместив прибор в плоско-

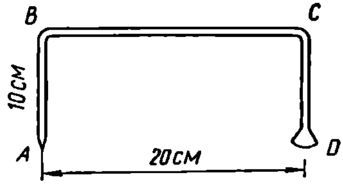


Рис. 210.

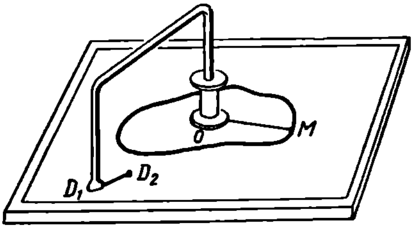


Рис. 211.

сти, перпендикулярной плоскости данной фигуры (для чего в школьной практике часто пользуются катушкой), помещают острие A в центре тяжести и отмечают некоторое положение D_1 топорика D. Затем острие проводят по отрезку OM, обводят контур и опять возвращают в точку O. Свободно перемещаясь, топорик D займет после обхода некоторое положение D_2. Тогда площадь данной фигуры

$$S \approx k(D_1D_2),$$

где k — постоянная для данного прибора, определяемая эмпирически (с помощью обмера какой-либо фигуры, площадь которой известна). Для повышения точности измерения рекомендуется повторить описанную здесь операцию, обходя контур в противоположном направлении, и взять среднее арифметическое отрезков D_1D_2 в обоих обходах. Точность планиметра-топорика — около 2%.

Значительно бо́льшую точность дают так называемые *полярные планиметры* фабричного изготовления (идея которых предложена Амслером). Общее представление об устройстве полярного планиметра дает рисунок 212. Работа с полярным планиметром нуждается в специальном описании и требует известной подготовки.

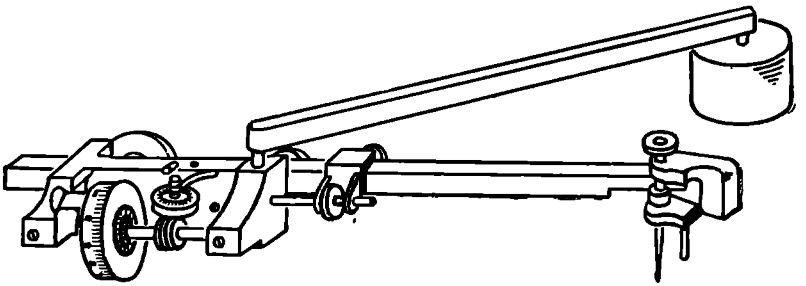


Рис. 212.

3. Основной единицей площади в метрической системе мер служит *квадратный метр* (1 *м*²) — площадь квадрата со стороной 1 *м*. Площадь в 100 квадратных метров получила название ар.

Более употребительна в практике мера в 1 гектар = 100 ар. Гектар (1 *га*) есть площадь квадрата, каждая сторона которого содержит 100 метров. Большие площади часто исчисляются также в квадратных километрах. В дореволюционной России была распространена мера земельной площади в 1 десятину, равная 2400 квадратных саженей. 1 десятина равна приблизительно 1,0925 *га*, т. е. эта площадь несколько более гектара.

§ 31. ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА ТРЕХМЕРНОЙ ФИГУРЫ И ЕГО СВОЙСТВА

Понятие объема можно ввести аналогично понятию площади. Для этого исходят из некоторого «единичного» куба (базиса), строят кубическую пространственную решетку из плоскостей, соответственно параллельных плоскостям граней единичного куба и отстоящих от них на расстояниях, кратных ребру. Затем ребра единичного куба делят последовательно на 10, 100 и т. д. частей и образуют последовательные кубические решетки, ячейки которых составляют соответственно $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000^2}$ и т. д. часть ячейки первоначальной решетки.

Рассуждая как и в плоском случае, можно показать, что для любой ограниченной пространственной фигуры существуют пределы:

$$v = \lim_{i\to\infty} \frac{n_i}{1000^{i-1}} \quad \text{и} \quad V = \lim_{i\to\infty} \frac{N_i}{1000^{i-1}},$$

где n_i и N_i — числа кубов i-й кубической пространственной решетки, соответственно заключенных внутри данной фигуры и имеющих с ней хотя бы одну общую точку. В том случае, когда $v = V$, то их общее значение называется *объемом* фигуры, а фигура называется *кубируемой*. Объем фигуры Ф условимся обозначать так: [Ф].

Условие кубируемости, т. е. условие существования объема трехмерной фигуры, состоит в том, чтобы

$$\lim_{i\to\infty} \frac{N_i - n_i}{1000^{i-1}} = 0.$$

Число $\mu_i = N_i - n_i$ показывает, сколько кубов i-й решетки пересекает границу данной фигуры.

Совершенно так же, как это было сделано в § 26 для прямоугольника, можно показать, что объем прямоугольного параллелепипеда, ребра которого соответственно параллельны линиям кубической сети и равны соответственно a, b, c, выражается произведением $a \cdot b \cdot c$.

После этого так же, как в § 28, выводятся свойства аддитивности и монотонности объема кубируемой фигуры.

При изучении вопроса об инвариантности площади плоской фигуры мы установили, что общий случай сводится к доказательству инвариантности площади квадрата. Точно так же инвариантность объема пространственной фигуры сводится к инвариантности объема куба.

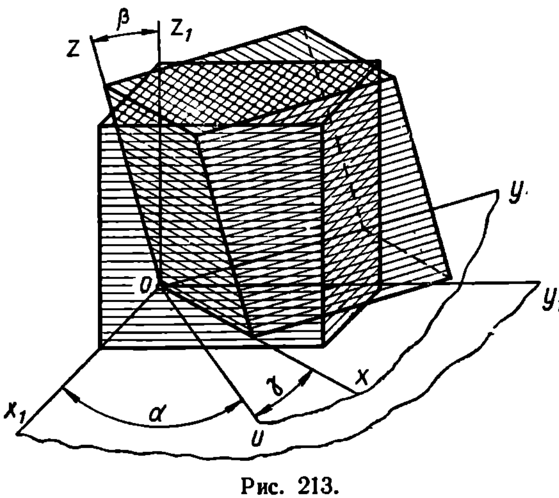


Рис. 213.

Случай параллельного переноса рассматривается вполне аналогично тому, как это делалось в плоскости для квадрата. Поэтому мы остановимся только на рассмотрении такого случая, когда данные кубы нельзя совместить посредством параллельного переноса.

Пусть K_1 и K_2 — данные равные кубы. Построим куб K, образуемый из K_2 параллельным переносом и имеющий с K_1 общую вершину. Достаточно сопоставить K_1 и K.

Если K_1 и K имеют общее ребро, то их грани, перпендикулярные к этому ребру, окажутся составленными из соответственно равных многоугольников (см. п. 3, § 28). Сами же кубы будут в этом случае разлагаться на соответственно равные прямые призмы, образуемые одна из другой параллельным переносом.

Пусть теперь кубы K_1 и K имеют только общую вершину O (рис. 213). Обозначим ребра данных кубов, исходящие из этой вершины, через Ox_1, Oy_1, Oz_1 и соответственно Ox, Oy, Oz.

Перемещение куба K_1 в положение K можно осуществить путем последовательного поворота около трех осей:

1) около оси z на угол α до совпадения Ox_1 с линией U пересечения плоскостей xOy и x_1Oy_1, после чего K_1 преобразуется в K' с тем же объемом, так как они имеют общее ребро z_1;

2) около оси U на угол $\beta = (z_1, z)$, после чего Oz_1 совпадает с Oz и K' преобразуется в K'' с тем же объемом, так как они имеют общее ребро U;

3) около Oz на угол $\gamma\,(U, x)$, после чего K'' преобразуется в K без изменения объема.

§ 32. КУБИРУЕМОСТЬ ПРОСТОГО МНОГОГРАННИКА

Чтобы доказать кубируемость простого многогранника, надо оценить число кубов решетки, пересекающих его границу. Граница многогранника состоит из конечного числа плоских многоугольников. Поэтому для решения поставленной задачи надо проанализировать вопрос о числе кубов решетки, пересекаемых каким-либо плоским многоугольником.

Представим себе, что каждый куб решетки, внутри которого имеются точки данной плоскости П, проектируется на плоскости, соответственно параллельные плоскостям кубической решетки. В проекции образуются квадраты. Каждый такой квадрат может оказаться, вообще говоря, проекцией как угодно большого числа кубов решетки, пересекаемых данной плоскостью. Но нетрудно убедиться, что по крайней мере на одной из упомянутых плоскостей проекций в каждый квадрат проектируется не более трех кубов решетки, пересекаемых данной плоскостью П. Действительно, если α, β, γ — углы, образуемые плоскостью П с плоскостями проекций, то, как известно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

откуда следует, что по крайней мере одно из слагаемых больше или равно $\frac{1}{3}$. Пусть, например, $\cos^2\alpha \geqslant \frac{1}{3}$. Тогда легко показать, что $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \sqrt{2}$. Рассмотрим проекцию кубов решетки именно на ту плоскость проекций, с которой секущая плоскость образует угол α. Рассмотрим квадрат $A'B'C'D'$ в плоскости проекций, и пусть плоскость П пересекает ребра кубической решетки, проходящие через вершины этого квадрата, соответственно в точках A, B, C и D (см. рис. 214). Проведем, например, через точку A плоскость $A \ldots C_1$, параллельную плоскости проекций. Тогда

$$CC_1 = AC_1 \operatorname{tg}\angle CAC_1 = a\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\angle CAC_1.$$

Но $\operatorname{tg} \angle CAC_1 < \operatorname{tg} \alpha$, так как линейный угол двугранного угла — наибольший из углов, образуемых прямыми, лежащими в секущей плоскости, с их проекциями на плоскость $A \ldots C_1$, параллельную выбранной плоскости проекции. Следовательно, $CC_1 \leqslant 2a$, а это означает, что отрезок CC_1, а следовательно и секущая плоскость, может иметь общие точки не более как с тремя кубами решетки, проектирующимися в квадрат $A'B'C'D'$.

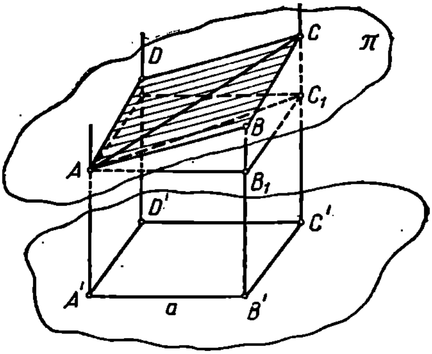


Рис. 214.

После этого предварительного расчета легко убедиться в кубируемости простых многогранников.

Рассмотрим некоторую грань многогранника и ее проекцию на соответствующую плоскость кубической решетки (или ей параллельную). В проекции получится простой многоугольник, который, как известно, квадрируем. Следовательно, в проекции существует $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{N_i}{100^{i-1}} = S$. Но согласно предыдущему число кубов, пересекаемых данной гранью $\mu_i \leqslant 3N_i'$, так что

$$\frac{\mu_i}{1000^{i-1}} \leqslant 3\frac{N_i}{1000^{i-1}} = \frac{3}{10^{i-1}} \cdot \frac{N_i}{100^{i-1}},$$

откуда ясно, что $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\mu_i}{1000^{i-1}} = 0$. А так как число граней многогранника конечно, то такое соотношение будет иметь место и для числа $\sum\limits_i \mu_i$ кубов, пересекаемых всеми гранями многогранника, а это и означает кубируемость многогранника.

§ 33. ОБЪЕМ ПРИЗМАТОИДА

В школьном курсе рассматривают формулы для нахождения объемов призм, пирамид и усеченных пирамид. Соответствующие рассуждения читатель может восстановить в памяти, например, по школьному учебнику геометрии.

Выведем одну интересную формулу, представляющую обобщение тех результатов, которые изучаются в школе.

Различные употребительные многогранники, как уже отмечалось в § 14, подходят под определение *призматоида*.

Приведем вывод формулы объема призматоида, принадлежащей английскому математику Томасу Симпсону (1710—1761).

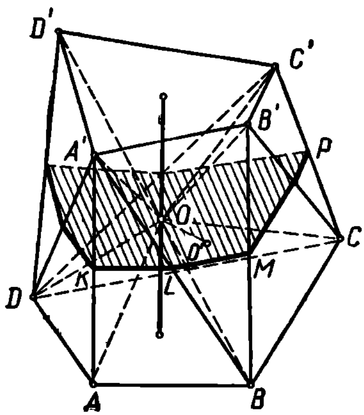


Рис. 215.

Будем называть *высотой призматоида* расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат основания призматоида.

Пусть O (рис. 215) — середина какой-либо высоты призматоида.

Разложим каждую четырехугольную боковую грань на два треугольника и соединим точку O со всеми вершинами призматоида. После этого можно представлять себе, что призматоид разложен на пирамиды.

Проведем через точку O плоскость, параллельную плоскостям оснований призматоида, и построим сечение поверхности призматоида этой плоскостью (на рис. 215 — многоугольник $KLM\ldots$), которое будем называть *средним сечением* призматоида.

Две из пирамид, на которые разложен призматоид, имеют основаниями соответственно основания призматоида и общую вершину O (на рисунке 215 это пирамиды $OABCD$ и $OAB'C'D'$). Их объемы равны соответственно $\frac{1}{6}S_1h$ и $\frac{1}{6}S_2h$, где S_1 и S_2 — площади оснований призматоида, h — длина его высоты. Вершины остальных пирамид — также в точке O, а их основаниями служат боковые грани призматоида (или их треугольные части). Рассмотрим любую из таких пирамид, например пирамиду $OA'B'B$. Ее объем

$$[OA'B'B]=\frac{1}{3}(A'B'B)OO',$$

где OO' — перпендикуляр к плоскости $A'B'B$. Так как звено LM среднего сечения есть средняя линия треугольника $A'B'B$, то $(A'B'B)=4(BLM)$ и поэтому

$$[OA'B'B]=\frac{4}{3}(BLM)OO'.$$

Но $\frac{1}{3}(BLM)(OO')$ есть объем пирамиды $OBLM$, так что

$$[OA'B'B]=4[OBLM].$$

Для вычисления объема пирамиды $OBLM$ можно принять за ее основание треугольник OLM. Тогда высота этой пирамиды составит половину высоты призматоида. Следовательно,

$$[OA'B'B]=4\cdot\frac{1}{3}\cdot(OLM)\cdot\frac{h}{2}=\frac{2}{3}h(OLM).$$

Вычисляя сумму объемов всех таких пирамид, вынесем $\frac{2}{3}h$ за скобки. В скобках останется сумма площадей

$$(OKL),\ (OLM),\ (OMN),\ \ldots,$$

т. е. площадь среднего сечения S, так что сумма объемов всех «боковых» пирамид будет равна $\frac{2}{3}hS$. Чтобы получить объем призматоида, остается сложить объемы двух ранее рассмотренных пирамид с полученной суммой объемов пирамид, «опирающихся» на боковые грани:

$$V=\frac{1}{6}h(S_1+S_2+4S).$$

Эту формулу называют иногда *формулой Ньютона — Симпсона.*

Пример. Найдем высоту правильной усеченной четырехугольной пирамиды, зная ребра оснований a и b и объем V.

В данном случае средним сечением будет квадрат со стороной $\frac{a+b}{2}$. Поэтому по предыдущей формуле

$$V=\frac{1}{6}h\left[a^2+b^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right],$$

так что

$$h=\frac{6V}{a^2+b^2+(a+b)^2}=\frac{6V}{2a^2+2b^2+2ab}=\frac{3V}{a^2+b^2+ab}.$$

§ 34. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЙ ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМА КАК ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО СРЕДСТВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Привлечение понятий площади или объема позволяет иногда значительно упростить решение таких задач, в формулировках которых эти понятия вовсе и не употребляются. Чаще всего это удается сделать с помощью приема «двойного определения площади» (или объема): площадь (или объем) некоторой фигуры выражается через данные и искомые величины двумя различными способами и полученные выражения приравниваются. Получается уравнение, из которого нередко удается либо найти искомую величину, либо вывести требуемую зависимость между величинами. Рассмотрим некоторые примеры применения этого метода.

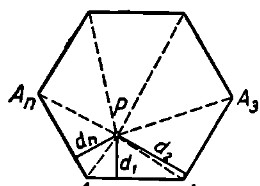


Рис. 216.

Пример 1. Покажем, что для всех точек, лежащих внутри правильного многоугольника, сумма расстояний от всех прямых, на которых лежат стороны многоугольника, остается постоянной.

Пусть P (рис. 216) — внутренняя точка правильного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$, каждая сторона которого равна a, а d_1, $d_2, \ldots\ldots, d_n$ — соответственно расстояния точки P от прямых, на которых лежат стороны многоугольника.

Лучи, проведенные из точки P во все вершины многоугольника, разлагают этот многоугольник на n треугольников, из рассмотрения которых ясно, что площадь данного многоугольника равна:

$$S = \frac{1}{2}ad_1 + \frac{1}{2}ad_2 + \ldots + \frac{1}{2}ad_n = \frac{1}{2}a(d_1 + d_2 + \ldots + d_n).$$

Следовательно, $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \frac{2S}{a} = \text{const}$.

Пример 2. Определить высоту SD тетраэдра $SABC$, зная, что его ребра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и равны соответственно a, b и c.

Ясно, что объем данного тетраэдра

$$V = \frac{1}{3}(ABC) \cdot SD.$$

С другой стороны,

$$V = \frac{1}{6}abc.$$

Поэтому

$$2(ABC) \cdot SD = abc. \qquad (*)$$

По аналогу теоремы Пифагора (см. задачу 26 к § 26—30)

$$(ABC)^2 = \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ac\right)^2 + \left(\frac{1}{2}bc\right)^2.$$

А из соотношения (*) следует, что

$$(ABC)^2 = \frac{1}{4}\frac{a^2b^2c^2}{(SD)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4}\frac{a^2b^2c^2}{(SD)^2} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2),$$

откуда сразу получаем:

$$(SD)^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Из следующего примера можно видеть, что прием «двойного определения» площади (или объема) далеко не исчерпывает все возможности применения понятия площади (или объема) в качестве вспомогательного средства для решения геометрических задач.

Пример 3. Докажем *теорему Чевы*.

Пусть A, B, C — вершины треугольника; A_1, B_1, C_1 — точки, лежащие соответственно на сторонах BC, AC, AB этого треугольника. Если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 имеют общую точку O, то выполняется соотношение:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство. Треугольники AC_1C и BC_1C (рис. 217) имеют равные высоты. Поэтому их основания относятся как площади, т. е.

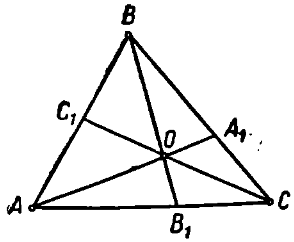


Рис. 217.

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{(AC_1C)}{(BC_1C)}.$$

Аналогично, рассматривая треугольники AC_1O и BC_1O, находим:

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{(AC_1O)}{(BC_1O)}.$$

Но тогда по свойству равных отношений:

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{(AC_1C) - (AC_1O)}{(BC_1C) - (BC_1O)}, \text{ т. е. } \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{(ACO)}{(BCO)}.$$

Таким же путем можно убедиться, что

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{(ABO)}{(ACO)} \text{ и } \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{(BCO)}{(ABO)}.$$

Перемножив три последних равенства почленно, получим соотношение, указанное в заключении теоремы Чевы.

§ 35. О ПОНЯТИЯХ ДЛИНЫ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ И ПЛОЩАДИ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Вопрос об измерении дуг кривых линий рассматривается в общем виде в курсах математического анализа, где длина дуги кривой линии определяется как предел периметра ломаной, вписанной в данную дугу, при условии, что число звеньев ломаной неограниченно растет, а каждое звено неограниченно уменьшается.

Познакомимся еще с одним способом введения понятия длины дуги кривой линии. Этот способ был предложен К. В. Борхардтом (1817—1880) и развит Г. Минковским (1864—1910). Анализ и сравнительная оценка такого подхода к понятию длины кривой приведены в книге [25], п. 78—80. Несмотря на первое впечатление искусственности, определение Борхардта — Минковского по существу согласуется с опытом не хуже, нежели «классическое» определение посредством вписанных ломаных.

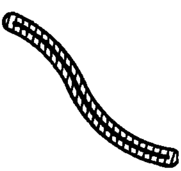


Рис. 218.

Основная идея состоит в том, чтобы временно приписать данной дуге некоторую постоянную ширину (см. рис. 218) и разделить площадь полученной таким образом области на ее ширину. При этом результат будет тем точнее, чем меньше ширина области. Дальнейшее изложение представляет собой уточнение этой идеи и иллюстрацию ее на некоторых простейших примерах[1].

Ограничимся рассмотрением плоских кривых.

Пусть AB (рис. 219) — данная дуга плоской кривой. Выберем некоторый отрезок r и рассмотрим все точки плоскости, удаленные от фигуры AB меньше, чем на r.

Обозначим площадь области, образуемой всеми такими точками, через $S(AB, r)$. Назовем длиной дуги AB предел отношения площади S к длине отрезка $2r$, когда отрезок r неограниченно убывает:

$$\smile AB = \lim_{r\to 0} \frac{S(AB, r)}{2r}.$$

Дуга AB называется *спрямляемой*, если этот предел существует.

Пример 1. Длина прямолинейного отрезка.

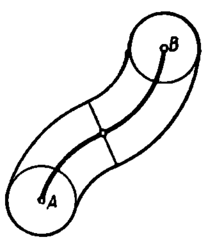


Рис. 219.

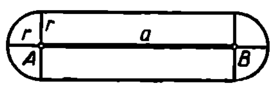


Рис. 220.

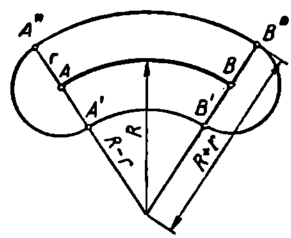


Рис. 221.

Рассмотрим прямолинейный отрезок, длина которого (в обычном смысле) равна a. Нетрудно понять (см. рис. 220), что при этом

$$S(AB, r) = 2ar + \pi r^2.$$

Поэтому

$$\frac{S}{2r} = a + \frac{\pi}{2}r, \text{ а } \lim_{r\to 0} \frac{S}{2r} = a,$$

т. е. новое определение длины приводит к обычному значению длины прямолинейного отрезка.

Пример 2. Длина дуги окружности.

Рассмотрим дугу окружности радиуса R, содержащую n дуговых градусов.

Определенную выше площадь $S(AB, r)$ можно в данном случае рассматривать (см. рис. 221) как разность площадей двух секторов

[1] Мы придерживаемся здесь модификации метода Борхардта — Минковского, изложенной в [37].

$OA''B''$ и $OA'B'$, сложенную с суммой площадей двух полукругов радиуса r. Таким образом,

$$S(AB,\, r) = \pi \frac{n}{360}(R+r)^2 - \pi \frac{n}{360}(R-r)^2 + 2\frac{\pi r^2}{2} =$$

$$= \frac{n\pi}{360}\left(4Rr + \frac{360r^2}{n}\right); \quad \frac{S}{2r} = \frac{n\pi}{360}\left(2R + \frac{180r}{n}\right).$$

Согласно определению

$$\smile AB = \lim_{r\to 0} \frac{S}{2r} = \frac{n\pi}{360}\cdot 2R = \frac{\pi Rn}{180}.$$

Ясно, что при данном определении длина дуги обладает монотонностью: приращение дуги будет вызывать приращенне площади S, в то время как величина r остается без изменения.

При весьма общих предположениях относительно рассмотренных дуг можно убедиться в том, что введенное таким путем понятие длины дуги обладает также свойством аддитивности.

[illegible]енный метод определения длины дуги может быть применен также и в пространстве после соответственного видоизменения.

Еще один интересный подход к определению длины дуги изложен в статье Е. М. Ландиса [24]. В основу этого подхода положены идеи академика А. Н. Колмогорова, предложенные им для решения более общей задачи, чем задача определения длины дуги.

2. Теорию площадей кривых поверхностей основывают обычно на принципе приближения к кривой поверхности посредством вписанных в нее многогранных поверхностей и перехода к пределу при условии, что число граней многогранной поверхности неограниченно возрастает, а размеры каждой грани неограниченно уменьшаются. Именно такой подход к понятию площади кривой поверхности осуществляется в школьном курсе геометрии, когда боковая поверхность цилиндра определяется посредством вписывания призм, а боковая поверхность конуса — посредством вписывания пирамид.

В более сложных случаях приближение к данной кривой поверхности осуществляют посредством вписывания уже изученных, более простых поверхностей. Так, например, поверхность шарового пояса определяют обычно, вписывая в него систему усеченных конусов (образуемых вращением ломаной, вписанной в большой круг сферы).

Отыскание площади кривой поверхности посредством аппроксимации (приближения) ее вписанными многогранными поверхностями может даже в некоторых простых случаях привести к неожиданному результату: площадь вписанной многогранной поверхности может не иметь определенного предела при неограниченном увеличении числа граней и при неограниченном уменьшении размеров каждой грани. Такое явление впервые было обнаружено в 1880 г. немецким математиком Г. Шварцем на примере цилиндрической поверхности.

Разделим высоту цилиндра на n равных частей и через каждую точку деления проведем плоскость, перпендикулярную высоте. Поверхность цилиндра разделится при этом на n цилиндрических поясов (рис. 222).

Разделим окружность основания цилиндра на $2m$ равных частей и проведем через точки деления образующие. Припишем окружно-

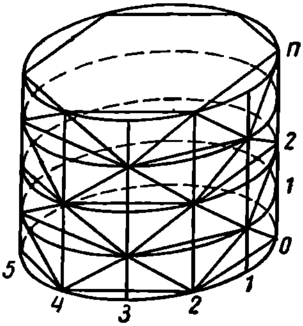


Рис. 222.

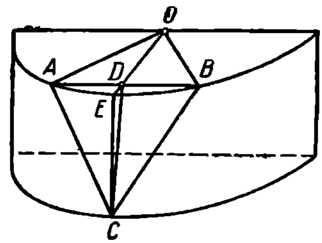


Рис. 223.

стям горизонтальных сечений и проведенным образующим порядковые номера и отметим точки пересечения окружностей нечетных номеров с образующими нечетных номеров и окружностей четных номеров с образующими четных номеров. Соединяя каждую из полученных таким образом точек с ближайшей к ней, получим вписанную в цилиндр многогранную поверхность с равными между собой треугольными гранями.

Подсчитаем площадь каждой треугольной граии, воспользовавшись для этого рисунком 223.

$$(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot CD.$$

Но $AB = 2\ AD$, $AD = AO \cdot \sin \angle AOD = r \sin \frac{\pi}{m}$, так что $(AB) = 2r \sin \frac{\pi}{n}$. В свою очередь $CD = \sqrt{CE^2 + DE^2}$, $(CE) = \frac{h}{n}$, где h — высота цилиндра.

$$DE = OE - OD = OE - OA \cos \angle AOE = r - r \cos \frac{\pi}{m},$$

так что

$$CD = \sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + 4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

Следовательно,

$$(ABC) = r \sin \frac{\pi}{m} \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + 4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

А так как число всех треугольных граней, очевидно, равно $2mn$, то площадь вписанной многогранной поверхности

$$S(m, n) = 2mnr\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sqrt{\left(\frac{h}{n}\right)^2 + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Для перехода к пределу представим эту величину в следующей форме:

$$S(m, n) = 2\pi r\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\cdot\sqrt{h^2 + \left(\frac{n}{m^2}\right)^2\cdot\frac{\pi^4 r^2}{4}\cdot\frac{\sin^4\frac{\pi}{2m}}{\left(\frac{\pi}{2m}\right)^4}}.$$

Обозначая $\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{n}{m^2}$ через P, получим:

$$\lim_{m,n\to\infty} S(m, n) = 2\pi r\sqrt{h^2 + \frac{\pi^4 r^2}{4}\cdot P^2}.$$

Ясно, что этот предел зависит от P. Но число P может принимать различные значения в зависимости от того, по какому закону изменяются числа m и n. Если положить, например, что $m = n$, то $P = \lim\frac{n}{m^2} = \lim\frac{1}{m} = 0$ и $\lim S(m, n) = 2\pi rh$.

Если же $n = m^2$, то $P = 1$ и

$$\lim S(m, n) = 2\pi r\sqrt{h^2 + \frac{\pi^2 r^2}{4}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m,n\to\infty} S(m, n)$ не существует. Особенно интересно заметить, что площадь многогранной поверхности, указанной Шварцем, может и неограниченно возрастать. Такое обстоятельство возникает, если положить, например, $n = m^3$. Тогда $\frac{n}{m^2} = m$ и $P = \infty$.

Пример, предложенный Г. Шварцем, указывает на несовершенство определения площади криволинейной поверхности с помощью вписанных многогранных поверхностей. Оказывается недостаточным потребовать только, чтобы число граней вписанной многогранной поверхности неограниченно росло и каждая грань неограниченно уменьшалась. Необходимо накладывать еще какие-то дополнительные ограничения на вписываемые многогранные поверхности. Именно так и делается, когда в школьном курсе геометрии для вычисления площади цилиндрической поверхности привлекаются только правильные призмы, а для вычисления площади поверхности конуса — только правильные пирамиды. Таким путем удовлетворительно решается вопрос об определении площади некоторых конкретных видов криволинейных поверхностей.

Исследование ограничений, которые следует налагать на криволинейные поверхности и на вписываемые в них многогранные поверхности для того, чтобы определение понятия площади криволинейной поверхности этим способом было доброкачественным для достаточно широкого класса поверхностей, вызывает значительные трудности. С этими соображениями можно познакомиться, например, по главе V книги А. Лебега [25].

3. Принципиально иной подход к общему определению понятия площади криволинейной поверхности был указан Борхардтом и Минковским. Он аналогичен рассмотренному в п. 1 способу определения длины плоской кривой.

Поверхность «обволакивается» слоем постоянной ширины, и ее площадь определяется как отношение объема слоя к его толщине. Точность результата возрастает с уменьшением толщины слоя. В более точной математической формулировке эта идея приводит к следующему определению.

Площадью (D) криволинейной поверхности называется предел отношения объема $V(D, r)$ тела, образуемого точками, удаленными от фигуры D менее чем на r, к длине $2r$ при условии неограниченного уменьшения отрезка r:

$$(D) = \lim_{r\to 0} \frac{V(D,r)}{2r}.$$

Покажем на некоторых примерах, что в простейших случаях это определение приводит к тем же результатам, что и общепринятое.

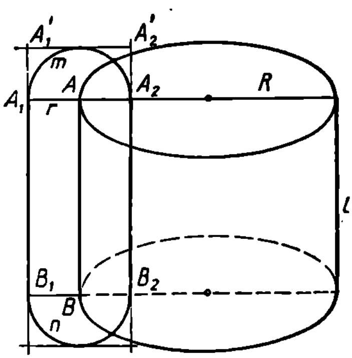


Рис. 224.

Пример 1. Рассмотрим боковую поверхность прямого круглого цилиндра, высота (или образующая) которого l, а радиус основания R.

Описанную выше трехмерную область можно представлять как тело вращения (около оси цилиндра) фигуры $A_1mA_2B_2nB_1$ (см. рис. 224), ограниченной двумя сторонами A_1B_1 и A_2B_2 прямоугольника $A_1A_2B_2B_1$ и двумя сопряженными с ними полуокружностями A_1mA_2 и B_1nB_2 с центрами A и B и радиусами, равными r.

Прямоугольник $A_1A_2B_2B_1$ описывает тело, представляющее разность двух цилиндров, общей осью которых служит ось данного цилиндра, образующая равна l, а радиусы — соответственно $R + r$ и $R - r$. Поэтому объем этого тела

$$V_1 = \pi l [(R + r)^2 - (R - r)^2] = 4\pi Rlr.$$

Значит, $V_1 : 2r = 2\pi Rl$ и $\lim\limits_{r\to 0} \frac{V_1}{2r} = 2\pi Rl$.

Что же касается объема V_2 тела вращения, описанного полуокружностями A_1mA_2 и B_1nB_2, то он, очевидно, меньше удвоенного объема тела, описанного прямоугольником $A_1A_1'A_2'A_2$, где $A_1'A_2'$ — касательная к полуокружности A_1mA_2. Таким образом,

$$V_2 < 2[\pi(R+r)^2 r - \pi(R-r)^2 r] = 8\pi r^2 R,$$

так что $V_2 : 2r < 4\pi rR$, и поэтому $\lim\limits_{r\to 0}(V_2 : 2r) = 0$.

Следовательно, боковая поверхность цилиндра

$$(D) = \lim_{r\to 0}\frac{V_1+V_2}{2r} = 2\pi Rl.$$

Пример 2. Слой, «обволакивающий» сферу радиуса R, есть разность двух концентрических шаров с общим центром в центре данной сферы и радиусами соответственно $R+r$ и $R-r$. Поэтому

$$V(D,r) = \frac{4}{3}\pi(R+r)^3 - \frac{4}{3}\pi(R-r)^3 = 8\pi R^2 r + \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Следовательно, поверхность сферы

$$(D) = \lim_{r\to 0}\frac{V(D,r)}{2r} = \lim_{r\to 0} 4\left(\pi R^2 + \frac{1}{3}\pi r^2\right) = 4\pi R^2.$$

§ 36. РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ

1. При выводе формул для площадей и объемов различных фигур в школьном курсе геометрии используется понятие равносоставленности многоугольников и многогранников.

Коротко говоря, два многоугольника (многогранника) называются равносоставленными, если один из них можно «перекроить» в другой. Точный смысл этого определения состоит в следующем.

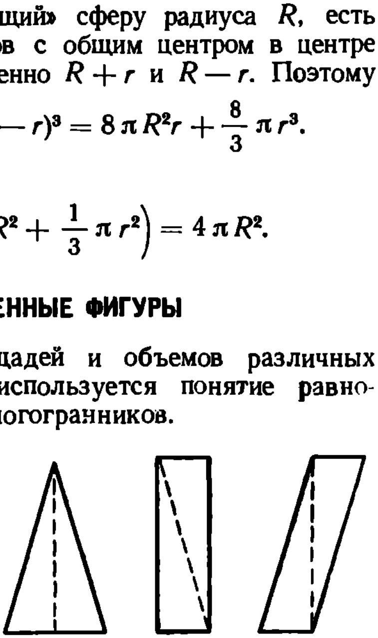


Рис. 225.

Два двумерных многоугольника (или два трехмерных многогранника) Φ и Ψ называются **равносоставленными**, если существуют такие многоугольники (многогранники)

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \text{ и } \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n,$$

что 1) $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n$; $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + \Psi_n$;

2) $\Phi_1 = \Psi_1$, $\Phi_2 = \Psi_2$, $\ldots$, $\Phi_n = \Psi_n$;

3) Ни фигуры $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, ни фигуры $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ не имеют попарно общих внутренних точек.

Понятие равносоставленности можно, после небольшого видоизменения, распространить и на другие виды пластинок или тел.

На рисунке 225 приведены простейшие примеры равносоставленных (двумерных) многоугольников.

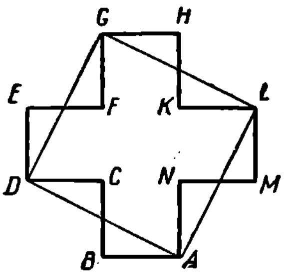


Рис. 226.

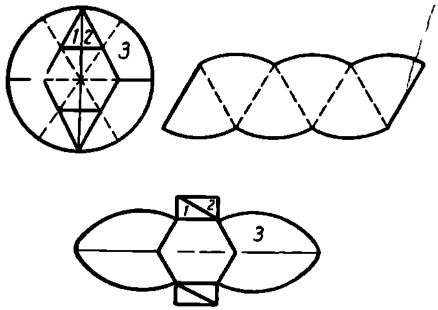


Рис. 227.

Крестообразный двенадцатиугольник $ABCDE...MN$ (рис. 226) равносоставлен с квадратом $ADGL$.

На рисунке 227 изображены три равносоставленные плоские криволинейные фигуры.

Ясно, что равенство есть частный случай равносоставленности, но равносоставленные фигуры не обязательно равны.

2. Познакомимся с некоторыми важнейшими свойствами равносоставленных многоугольников.

Два многоугольника Φ_1 *и* Φ_2, *равносоставленные порознь с одним и тем же многоугольником* Φ_3, *равносоставлены* (свойство транзитивности).

Действительно, пусть фигура Φ_1 равносоставлена с фигурой Φ_3. Это означает, что фигуру Φ_3 можно сетью отрезков разложить на такие части, из которых, после изменения их взаимного расположения, можно образовать фигуру Φ_1. Равносоставленность фигур Φ_2 и Φ_3 означает, в свою очередь, существование на Φ_3 такой сети, которая делит фигуру Φ_3 на части, из которых можно составить фигуру Φ_2. Представим себе, что на Φ_3 нанесены обе упомянутые сети одновременно. При этом фигура Φ_3 разложится на такие (вообще более мелкие, чем в каждом из данных разложений) части, из которых можно образовать как фигуру Φ_1, так и фигуру Φ_2.

Параллелограммы, имеющие соответственно равные основания и высоты, равносоставлены. В этом можно убедиться путем непосредственного указания способа разложения таких параллелограммов на соответственно равные части. Ради простоты будем считать, что основания параллелограммов совмещены одно с другим. Тогда возможны три случая, сущность которых ясна из рисунка 228. Читатель без труда самостоятельно воспроизведет необходимые умозаключения.

Каждый треугольник равносоставлен с параллелограммом, имеющим то же основание и вдвое меньшую высоту. Сущность доказательства этого предположения ясна из рисунка 203, где $A'B'$ — средняя линия треугольника ABC, $BD \parallel AC$.

Из двух последних предложений непосредственно следует, что *треугольники, имеющие равные основания и равные высоты, равносоставлены.*

3. Из свойств площади сразу следует, что *равносоставленные плоские фигуры равновелики*, т. е. имеют равные площади. Естественно возникает вопрос о справедливости обратного предложения: если две плоские фигуры равновелики, то будут ли они также равносоставлены? Этот вопрос был решен для плоских многоугольников в положительном смысле венгерским математиком Фаркашем Бояи в 1832 г. и почти одновременно (в 1833 г.) немецким любителем математики Гервином. Приведем необходимые рассуждения.

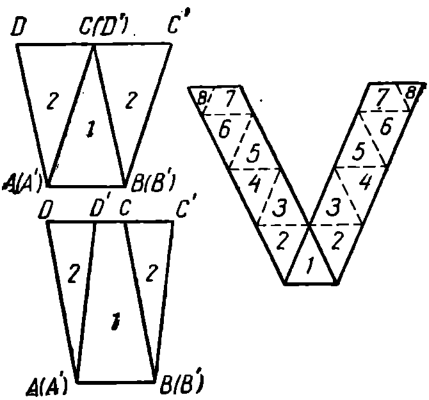


Рис. 228.

Лемма 1. *Равновеликие треугольники равносоставлены.*

Пусть дано, что $(ABC)=(A'B'C')$.

Если $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, то справедливость предложения очевидна.

Пусть $AB > A'B'$.

Строим прямую $B'D'$, параллельную $A'C'$, и окружность ω с центром в точке A' и радиусом, равным AB (рис. 229).

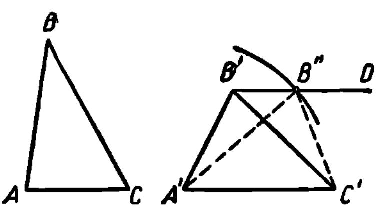


Рис. 229.

Так как B' — внутри ω, то прямая $B'D'$ пересекает окружность ω в некоторой точке B''.

Согласно предыдущему треугольник $A'B'C'$ равносоставлен с треугольником $A'B''C'$. Поэтому равны и их площади: $(A'B'C')=(A'B''C')$.

Но так как треугольники ABC и $A'B''C'$ имеют равные основания ($AB=A'B''$), то равны также (в силу равновеликости) и их высоты, проведенные к равным основаниям. Поэтому треугольники эти равносоставлены. А в силу свойства транзитивности равносоставлены и данные треугольники ABC и $A'B'C'$.

Лемма 2. *Каждый простой многоугольник равносоставлен с некоторым треугольником.*

Для выпуклого многоугольника можно указать способ построения такого треугольника. Пусть (рис. 230) дан некоторый выпуклый многоугольник $ABCD\ldots$. Построим диагональ AC и проведем через вершину B прямую, параллельную AC, до пересечения с прямой CD в точке B'. Тогда треугольник $AB'C$ равносоставлен с треугольником ABC, так как они имеют общее основание AC и равные высоты. Поэтому данный многоугольник $ABCD\ldots$ равносоставлен с многоугольником $AB'D\ldots$. Но в многоугольнике $AB'D\ldots$ одной вершиной меньше, чем в данном. Производя такое же построение на многоугольнике $AB'D\ldots$, уменьшим число вершин еще на одну и т. д., пока не получим треугольник, равносоставленный с данным многоугольником.

Пусть теперь M — произвольный (т. е. не обязательно выпуклый) многоугольник. Разложим его на треугольники $\triangle_1$,

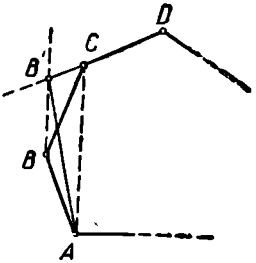


Рис. 230.

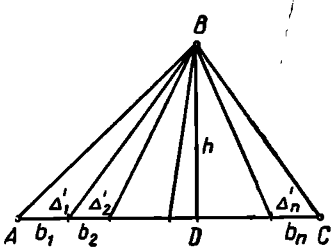


Рис. 231.

$\triangle_2, \ldots, \triangle_n$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — основания и $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — соответственно высоты этих треугольников. Пусть $\breve{h}$ — произвольный отрезок, h — его длина. Образуем n отрезков $\tilde{b}_i$, длины которых определяются формулой:

$$b_i=\frac{a_i h_i}{h} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Построим отрезок AC (рис. 231), равный сумме всех отрезков $\tilde{b}_i$, и пусть D — произвольная точка прямой AC, $DB \perp AC$, $(DB)=h$.

Соединив точку B с концами всех отрезков $\tilde{b}_i$, разложим треугольник ABC на n треугольников:

$$\triangle'_1,\ \triangle'_2,\ \ldots,\ \triangle'_n.$$

При этом треугольник $\triangle'_i$ равновелик треугольнику $\triangle_i$, так как по определению отрезка $\tilde{b}_i$

$$b_i \cdot h=a_i h_i.$$

Значит, по предыдущей теореме треугольник $\triangle'_i$ равносоставлен с треугольником $\triangle_i$, откуда ясно, что данный многоугольник M равносоставлен с треугольником ABC.

Теорема Бояи—Гервина.

Каждые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 — два многоугольника и $(M_1)=(M_2)$. Согласно предыдущей теореме существуют такие треугольники $\triangle_1$ и $\triangle_2$, что многоугольник M_1 равносоставлен с треугольником $\triangle_1$, а многоугольник M_2 — с треугольником $\triangle_2$. Так как равносоставленность влечет равновеликость, то $(M_1)=(\triangle_1)$ и $(M_2)=(\triangle_2)$. Следовательно, по условию $(\triangle_1)=(\triangle_2)$. Отсюда следует, что треугольники $\triangle_1$ и $\triangle_2$ равносоставлены, а затем по транзитивности и равносоставленность данных многоугольников M_1 и M_2.

Недавно (в 1951 г.) швейцарские геометры Г. Хадвигер и П. Глюр получили любопытное уточнение теоремы Бояи — Гервина: *Два равновеликих многоугольника M_1 и M_2 можно разложить на такие соответственно равные многоугольники, у которых стороны соответственно параллельны* (т. е. каждый из многоугольников, на которые разлагается многоугольник M_1, может быть получен из соответствующей части многоугольника M_2 с помощью параллельного переноса и, быть может, центральной симметрии).

4. К понятию равносоставленности близко понятие равнодополняемости.

Два многоугольника (многогранника) называются **равнодополняемыми**, если их можно дополнить равными многоугольниками (многогранниками) до равносоставленных. Точнее говоря, многоугольники (многогранники) Φ и Ψ равнодополняемы, если существуют такие многоугольники (многогранники)

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Phi' \text{ и } \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \Psi',$$

что 1) $\Phi_1=\Psi_1, \quad \Phi_2=\Psi_2, \ldots, \Phi_n=\Psi_n$;

2) $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, как и $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, не имеют общих внутренних точек;

3) $\Phi+\Phi_1+\ldots+\Phi_n=\Phi'$, $\Psi+\Psi_1+\ldots+\Psi_n=\Psi'$;

4) Φ' и Ψ' равносоставлены.

Простой пример двух равнодополняемых фигур приведен на рисунке 232.

Понятно, что как равные, так и равносоставленные фигуры равнодополняемы.

5. Приведем некоторые сведения относительно равносоставленности многогранников.

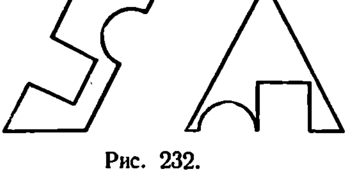


Рис. 232.

Известны многие примеры равносоставленности неравных (но равновеликих) многогранников. Так, каждый наклонный параллелепипед равносоставлен с некоторым прямым (и даже прямоугольным) параллелепипедом. В конце прошлого столетия были построены примеры тетраэдров, равносоставленных с кубом (Хилл). В 1900 г. было показано, что *любые два равновеликих многогранника могут быть разложены на соответственно равновеликие тетраэдры* (Зюсс).

Естественно возникает вопрос о справедливости для многогранников теоремы, аналогичной теореме Бояи—Гервина. Полнее говоря, речь идет о следующей проблеме: если два многогранника равновелики, то не будут ли они обязательно и равносоставлены?

Эта проблема была одной из знаменитых двадцати трех проблем, выдвинутых в 1900 г. на втором международном математическом конгрессе в Париже известным немецким математиком Д. Гильбертом; она получила название *третьей проблемы Гильберта.*

Понятно, что можно (в силу теоремы Зюсса) ограничиться рассмотрением только тетраэдров.

Третья проблема Гильберта была решена в 1901 г. учеником Гильберта Максом Деном (1872—1952). Ден доказал теорему, из которой следует, что *существуют равновеликие, но не равносоставленные многогранники.* Эта теорема Дена получила элементарное доказательство в одной из работ профессора Московского университета В. Ф. Кагана, и поэтому ее стали часто называть *теоремой Дена—Кагана.*

Приведем формулировку этой теоремы.

Пусть двугранные углы двух многогранников равны соответственно (в радианах)

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m \text{ и } \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n.$$

Если эти многогранники равносоставлены (или хотя бы равнодополняемы), то должны существовать такие натуральные числа

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$$

и такое целое число k, чтобы выполнялось равенство:

$$(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_m\alpha_m)-(q_1\beta_1+q_2\beta_2+\ldots+q_n\beta_n)=2k\pi. \qquad (*)$$

Известны конкретные примеры равновеликих тетраэдров, для которых это равенство не имеет места. Следовательно, такие тетраэдры заведомо не могут быть равносоставленными.

Простейший пример равновеликих, но не равносоставленных многогранников — это куб и правильный тетраэдр равного объема. Это вытекает из теоремы Дена—Кагана. Действительно, пусть α — двугранный угол правильного тетраэдра. Легко подсчитать, что $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Двугранный угол куба равен $\frac{\pi}{2}$. Если допустить, что куб и правильный тетраэдр равносоставлены, то должно иметь место равенство:

$$p\alpha+q\,\frac{\pi}{2}=2k\pi,$$

где p, q, k — целые числа. Отсюда следует:

$$\alpha=\frac{4k-q}{p}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому $\cos p\alpha$ равен либо нулю, либо 1, либо — 1.

С другой стороны, как уже отмечено, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Можно вывести отсюда, что $\cos p\alpha$ не может быть целым числом. Действительно, $\cos 2\alpha=-\frac{7}{3^2}$; $\cos 3\alpha=-\frac{23}{3^3}$, ... Пользуясь индукцией, можно убедиться, что $\cos n\alpha$ при любом натуральном n есть несократимая дробь со знаменателем 3^n. Полученное противоречие показывает, что равенство Дена не может иметь места для куба и правильного тетраэдра.

«Наугад» взятые равновеликие многогранники обычно не равносоставлены. Можно, однако, указать на некоторые исключительные примеры. Например, можно показать, что *если у двух выпуклых равновеликих многогранников каждая грань имеет центр симметрии, то эти многогранники равносоставлены* [9].

Из теоремы Бояи — Гервина следует, в частности, что равнодополняемые многоугольники равносоставлены. Любопытно отметить, что этот факт переносится и на многогранники (*теорема Зидлера* [9]).

Исследования Дена — Кагана объясняют, почему для вывода формулы объема пирамиды приходится привлекать теорию пределов, в то время как объемы параллелепипедов и вообще призм всегда можно найти по методу «разложения и дополнения».

Заметим, наконец, что *теорема Бояи — Гервина не распространяется на плоские криволинейные фигуры*. Нетрудно убедиться, например, что круг нельзя «перекроить» в многоугольник. Ясно, во-первых, что этого нельзя достигнуть, проводя только прямые линии. Действительно, окружность круга обращена к каждой области G, в границу которой входит ее дуга (рис. 233), своей внутренней, т. е. вогнутой, стороной. Поэтому такую область нельзя приложить к такой же или к прямолинейной области так, чтобы не осталось криволинейной границы.

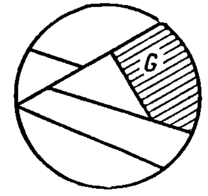


Рис. 233.

Если же, помимо прямых, проводить какие-либо кривые линии, то сумма длин криволинейных границ, обращенных к ограничиваемой области вогнутостью, будет на длину окружности превышать сумму длин всех криволинейных границ, обращенных к ограничиваемой области выпуклостью. Значит, и в этом случае все криволинейные границы не могут взаимно компенсироваться путем какого бы то ни было изменения положения отдельных областей, на которые разделен круг.

Таким образом, *круг и многоугольник одинаковой площади не могут быть равносоставленными.*

§ 37. ПРИНЦИП КАВАЛЬЕРИ И МЕТОД ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

1. Для вычисления объемов (а также и площадей) некоторых фигур иногда удобно воспользоваться методом, разработанным известным итальянским геометром Бонавентурой Кавальери (1598—1647). Сущность этого метода заключается в том, что вывод о равенстве (или отношении) объемов или площадей двух фигур делается на

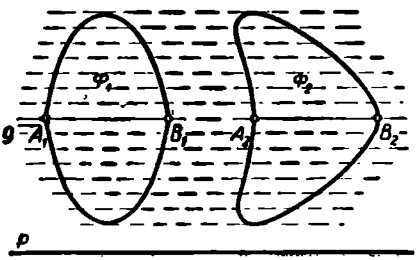


Рис. 234.

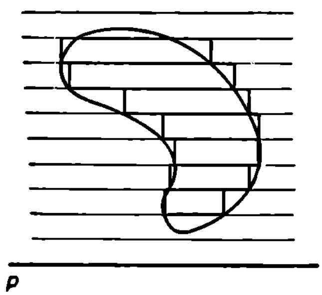


Рис. 235.

основании сравнения их параллельных сечений. Кавальери допускал, что для плоских фигур справедливо следующее предложение (*принцип Кавальери* на плоскости): *Если две плоские фигуры* Φ_1 и Φ_2 *расположены* (на плоскости) *относительно некоторой прямой* p (рис. 234) *так, что всякая прямая* g, *параллельная прямой* p, *дает в пересечении с обеими фигурами равные отрезки* ($A_1B_1 = A_2B_2$), *то эти фигуры имеют равные площади.*

Этот принцип можно пояснить следующим образом. Каждую плоскую фигуру можно приближенно представлять себе как бы вытканной из узких ленточек, имеющих форму прямоугольников очень малой одинаковой высоты (рис. 235), причем основанием каждого из этих прямоугольников служит отрезок, по которому пересекает фигуру прямая, параллельная p. Площадь фигуры приблизительно равна сумме площадей таких прямоугольников. Приближение будет тем точнее, чем уже каждая ленточка, т. е. чем меньше высота каждого прямоугольника. Применяя эти соображения к обеим фигурам на рисунке 234, замечаем, что на каждом «уровне» относительно прямой p мы будем получать равные прямоугольники, так как у них высоты по условию одинаковы, а основания равны согласно допущению принципа Кавальери. Но в таком случае и площади «ступенчатых фигур», приближенно заменяющих данные пластинки, будут равны.

Кавальери исходил из того, что можно производить замену ленточек более тонкими лишь до какого-то определенного предела, т. е. что существуют прямоугольники настолько малой высоты, которая уже не может быть уменьшена. Кавальери называл такие части «неделимыми», почему и сам метод получил название **метода неделимых**.

Принцип Кавальери для плоскости позволяет находить площади некоторых фигур путем сравнения этих фигур с такими, площади которых уже известны. Пусть, например (рис. 236), какая-либо дуга AB при параллельном переносе на вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$ заняла по-

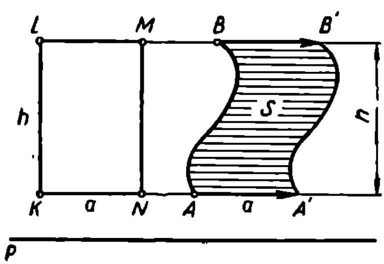


Рис. 236.

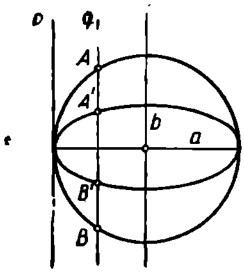


Рис. 237.

ложение $A'B'$. Площадь S, «заметенную» дугой при таком перемещении, легче всего определить, сравнивая полученную фигуру $ABB'A'$ с прямоугольником (или параллелограммом) $KLMN$, у которого основание $KN=AA'$, а высота равна расстоянию h между прямыми AA' и BB'. Согласно принципу Кавальери

$$S=a\cdot h.$$

Принцип Кавальери на плоскости можно принять в несколько более широкой формулировке, чем та, которая приведена в начале этого параграфа: *если каждая прямая, параллельная фиксированной прямой p, дает в пересечении с двумя данными плоскими фигурами отрезки, находящиеся в некотором постоянном отношении, то и площади данных плоских фигур находятся в таком же отношении.*

Применим это соображение к вычислению площади эллипса, имеющего полуоси a и b $(a>b)$.

Эллипс можно получить в итоге равномерного сжатия окружности к какому-либо из ее диаметров. Это можно подтвердить следующими простыми соображениями.

При соответствующем выборе прямоугольной системы координат (рис. 237) окружность радиуса a представится уравнением $x^2+y^2=a^2$, а эллипс — уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Из этих уравнений легко вывести, что

$$|y_{\text{окр}}|=\sqrt{a^2-x^2}, \text{ а } |y_{\text{элл}}|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

откуда ясно, что отношение отрезков $A'B'$ и AB, по которым прямые q, параллельные малой оси эллипса, пересекают эллипс и круг, будет сохранять постоянное значение, равное

$$\frac{2|y_{\text{элл}}|}{2|y_{\text{окр}}|}, \text{ или } \frac{b}{a}.$$

Согласно обобщенному принципу Кавальери, и отношение площадей $S_{\text{элл}}:S_{\text{окр}}=b:a$, так что

$$S_{\text{элл}}=\frac{b}{a}S_{\text{окр}}=\frac{b}{a}\pi a^2=\pi ab.$$

2. Метод Кавальери наиболее полезен в применении к вычислению объемов. Принцип Кавальери для пространства гласит:

Если в сечении двух тел T_1 и T_2 (рис. 238) *каждой плоскостью β, параллельной некоторой данной плоскости α, образуются равновеликие плоские фигуры* ($S_1=S_2$), *то и тела T_1 и T_2 равновелики.*

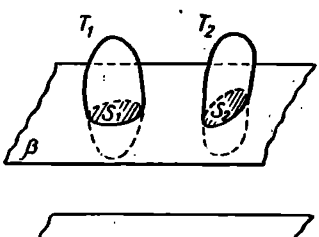


Рис. 238.

Не давая доказательства этого предложения (т. е. принимая его в качестве аксиомы), разъясним, какие наглядные соображения лежат в его основе.

Будем себе мыслить каждое из тел T_1 и T_2 составленным из очень тонких пластинок одинаковой толщины, расположенных параллельно плоскости α, подобно тому как толстая пачка писчей бумаги состоит из отдельных тонких листов. Объем каждого из тел будет равен сумме объемов составляющих его тонких пластинок. Объем же каждой пластинки можно считать равным произведению ее площади на толщину. Это тем вернее, чем тоньше пластинки. Но две пластинки, принадлежащие соответственно телам T_1 и T_2 и находящиеся на равных расстояниях (и по одну и ту же сторону) от плоскости α, имеют равные площади, а значит, и равные объемы. Но тогда и объемы тел T_1 и T_2 должны быть равными.

Принцип Кавальери для пространства дает удобный метод нахождения объемов некоторых тел. Например, условию Кавальери удовлетворяют две пирамиды, основания которых равновелики и высоты равны (так как при этих условиях будут равновелики и сечения, равноотстоящие от плоскостей оснований пирамид). Разлагая треугольную призму $ABCA'B'C'$ (рис. 239) на три равновеликие пирамиды $A'B'C'A$, $ABCC'$ и $ABB'C'$ и пользуясь формулой объема призмы, можно сразу же получить формулу объема треугольной (а затем и любой) пирамиды.

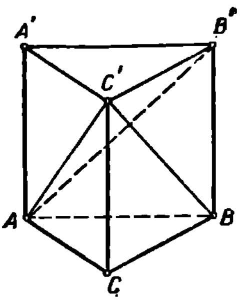


Рис. 239.

Интересный пример представляет вычисление с помощью принципа Кавальери объема шара в предположении, что уже известны формулы объема цилиндра и конуса.

Рассмотрим (рис. 240) некоторый шар радиуса R, и пусть α — плоскость, проходящая через его центр. Построим на этой плоскости окружность радиуса R и будем рассматривать ее как основание прямого круглого цилиндра высотой R.

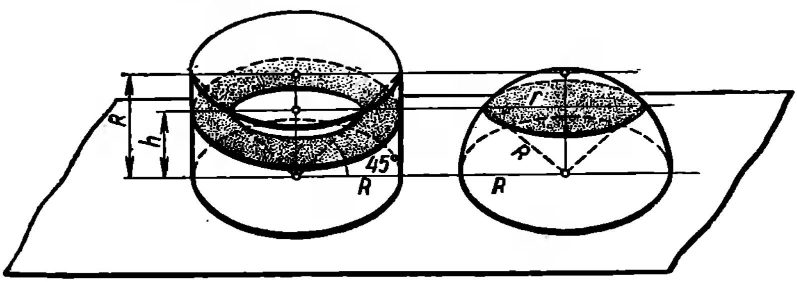


Рис. 240.

Впишем в этот цилиндр конус, помещая его вершину в центре нижнего основания цилиндра и принимая верхнее основание цилиндра за основание конуса. Рассмотрим тело T_1, представляющее разность цилиндра и конуса. Телом T_2 будем считать половину данного шара. Произведем сечение цилиндра на высоте h. Тогда

$$S_1=\pi R^2-\pi h^2=\pi(R^2-h^2),\quad S_2=\pi r^2=\pi(R^2-h^2),$$

так что $S_1=S_2$; т. е. удовлетворяется условие Кавальери.

Значит, объем полушара равен объему цилиндра без объема конуса:

$$[T_2]=\pi R^2R-\frac{1}{3}\pi R^2R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда ясно, что объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Принцип Кавальери показывает, насколько выгодно для вычисления объемов тел рассмотрение сечений этих тел плоскостями, параллельными какой-либо определенной плоскости.

Познакомимся еще с одним способом вычисления объемов, основаиином на рассмотрении параллельных сечений.

Пусть тело T расположено по одну сторону от некоторой плоскости α. Пусть при любом x (взятом в определенных пределах) плоскость β, отстоящая от плоскости α иа расстоянии x, пересекает тело T по некоторой плоской фигуре (пластинке) Π, имеющей площадь $S(x)$. В элементарной геометрии обычно оказывается, что $S(x)$ является весьма простой функцией от x, чаще всего — полиномом второй степени. Например, если тело T — полушар радиуса R, α — плоскость круга, ограничивающего этот полушар, то легко подсчитать (см. рис. 241), что

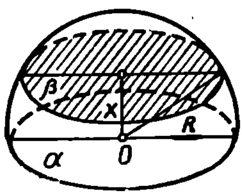


Рис. 241.

$$S(x)=\pi(R^2-x^2)\quad (0\leqslant x\leqslant R).$$

Рассмотрим подробнее тот случай, когда фуикция $S(x)$ изменяется по квадратичному закону, т. е. является полиномом от x не выше второй степени:

$$S(x)=A+Bx+Cx^2\quad (0\leqslant x\leqslant h),$$

причем все тело заключено между плоскостью α и плоскостью α', параллельной α и отстоящей от нее иа расстоянии h.

Плоскостями β_k, параллельными плоскости α и отстоящими от α на расстоянии

$$k\frac{h}{n}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

разобьем тело на тонкие слои ширины $\frac{h}{n}$. Объем каждого из этих слоев можно считать приближенно равным произведению $S\frac{h}{n}$.

Поэтому объем всего тела будет приближенно равен:

$$v_n=\frac{h}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(A+Bk\frac{h}{n}+Ck^2\frac{h^2}{n^2}\right).$$

В пределе при $n\to\infty$ получим точное выражение для объема тела T:

$$v=\lim_{n\to\infty} v_n.$$

Но

$$v_n=Ah+B\frac{h^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k+C\frac{h^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2.$$

Или:

$$v_n = Ah + Bh^2\frac{n(n-1)}{2n^2} + Ch^3\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

При $n \to \infty$ получим:

$$v = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}.$$

Таким образом, чтобы найти объем v тела T, достаточно найти три коэффициента: A, B и C. А для этого достаточно знать $S(x)$ при трех значениях x. Чаще всего берут $x=0$, $\frac{h}{2}$, h, так что $S(0)$ и $S(h)$ — это площади «конечных» сечений тела T, $S\left(\frac{h}{2}\right)$ — площадь «среднего» сечения.

Обозначим

$$S(0) = S_1, \quad S(h) = S_2, \quad S\left(\frac{h}{2}\right) = S.$$

Тогда для A, B, C получаем три уравнения:

$$S_1 = A, \quad S_2 = A + Bh + Ch^2, \quad S = A + B\frac{h}{2} + C\left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Если найти отсюда A, B и C и подставить в формулу для v, то получим:

$$v = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S).$$

Но это знакомая уже нам *формула Ньютона — Симпсона,* которая *справедлива,* следовательно, *для всех тел с квадратичным законом изменения площади сечения.*

Нетрудно проверить, что все основные тела, рассматриваемые обычно в элементарной геометрии (призмы, пирамиды, цилиндры, конусы, усеченные призмы и пирамиды, призматоиды, шары, шаровые слои и др.), относятся к классу тел с квадратичным законом изменения площади поперечного сечения. Поэтому формула Симпсона пригодна для вычисления объема любого из этих тел. В связи с этим обстоятельством формулу Ньютона — Симпсона часто называют у н и в е р с а л ь н о й.

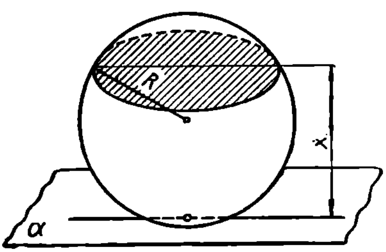


Рис. 242.

П р и м е р. Вычисление объема шара по формуле Ньютона — Симпсона.

Пусть R — радиус шара, а плоскость α касается этого шара (рис. 242). Произведем сечение шара плоскостью, отстоящей от плоскости α на расстоянии x. В сечении получится круг радиуса:

$$\sqrt{R^2-(x-R)^2}=\sqrt{2Rx-x^2}.$$

Площадь $S(x)$ этого сечения равна

$$\pi(2Rx-x^2),$$

так что $S(x)$ изменяется по квадратичному закону. Поэтому для вычисления объема шара можно применить универсальную формулу Ньютона—Симпсона:

$$v=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S).$$

Полагая в этой формуле в соответствии с условиями данного примера

$$h=2R,\ S_1=0,\ S_2=0,\ S=\pi R^2,$$

получим:

$$v=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 38. ПРИМЕНЕНИЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ СООБРАЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Еще Архимед (287—212 гг. до н. э.), Папп (III в. н. э.) и другие математики древности успешно применяли для решения геометрических вопросов некоторые соображения и понятия, заимствованные из области механики. Исследования этого рода были позднее (в 1635—1641 гг.) изложены в систематической форме швейцарским математиком Полем Гюльденом (1577—1643), немецким геометром и астрономом Августом Мебиусом (1790—1868) и другими.

Разнообразные геометрические задачи получают простые и наглядные решения, если воспользоваться понятием *центра тяжести* системы материальных точек и его свойствами. Это понятие можно определить чисто математически, не ссылаясь на какой-либо физический эксперимент. Строго математически можно вывести также те свойства, которые обычно используются при решении геометрических задач. Поэтому решение задач с помощью барицентрических соображений, т. е. с использованием понятия о центре тяжести, не менее строго в математическом отношении, чем решение с помощью какого-либо другого, привычного геометрического метода.

Исходным понятием является понятие *материальной точки*, т. е. точки, снабженной массой. Если (геометрическая) точка A снабжена массой m, то образующуюся таким образом материальную точку будем обозначать так: (A, m). С точки зрения математики материальная точка (A, m) — это комплекс, состоящий из некоторой геометрической точки A и некоторого положительного числа m.

Центром тяжести (*барицентром*) двух материальных точек (A, a) и (B, b) называется такая третья точка (C), которая лежит на отрезке AB и удовлетворяет правилу рычага: произведение ее расстояния от одной из двух данных точек (A) на массу (a), помещенную в этой точке, равно произведению ее расстояния от другой точки (B) на массу (b), помещенную в этой точке:

$$a \cdot AC = b \cdot BC.$$

Барицентр двух материальных точек $\mathbf{A}=(A, a)$ и $\mathbf{B}=(B, b)$ можно обозначить так: $\mathbf{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Барицентр (или центр тяжести, или центр масс) n материальных точек $\mathbf{A}_1=(A_1, m_1)$, $\mathbf{A}_2=(A_2, m_2)$, ..., $\mathbf{A}_n=(A_n, m_n)$ при $n>2$ определяется индуктивно как точка, получаемая с помощью следующей процедуры:

а) находят барицентр C_{n-1} $n-1$ материальных точек $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$;

б) точка C_n определяется как барицентр двух материальных точек: $\mathbf{C}_{n-1}=(C_{n-1}, m_1+m_2+\ldots+m_{n-1})$ и $\mathbf{A}_n=(A_n, m_n)$.

Если в барицентре C_n системы n материальных точек

$$(A_1, m_1), \ldots, (A_n\ m_n)$$

поместить всю массу этой системы, т. е. массу

$$m_1+m_2+\ldots+m_n,$$

то образующаяся таким образом материальная точка

$$(C_n, m_1+m_2+\ldots+m_n)$$

называется *объединением* или *материальным центром* данной системы материальных точек.

Отметим некоторые свойства барицентров, используемые обычно при решении геометрических задач.

1) *Для всякой системы материальных точек барицентр существует.*

2) *Положение барицентра системы не зависит от того порядка, в котором последовательно объединяются эти точки* (теорема о единственности барицентра).

3) *Положение барицентра системы материальных точек не изменится, если заменить несколько из этих точек их материальным центром* (теорема о возможности группировки материальных точек).

Доказательство этих (интуитивно очевидных) предложений можно найти в книге [7]. Здесь мы его приводить не будем.

Покажем на примере возможность применения барицентрических понятий к геометрии.

П р и м е р. Докажем следующую т е о р е м у. *Прямая, проходящая через вершину* (A) *основания* (AB) *треугольника* (ABC) *и через середину* (O) *медианы* (CC_1) *основания, отсекает от боковой стороны BC одну треть ее, считая от вершины треугольника.*

Поместим в A и B (рис. 243) такие массы, чтобы барицентром двух образующихся материальных точек служила точка C_1. Для этого достаточно в A и B поместить по 1 единице массы. Затем поместим в C такую массу, чтобы вся система имела барицентром точку O. Для этого следует поместить в C 2 единицы массы.

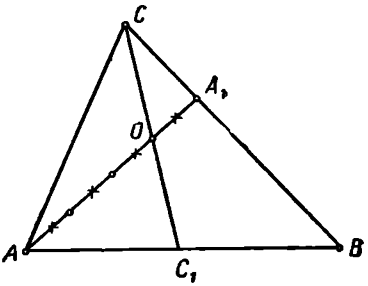


Рис. 243.

Пусть A_1 — барицентр материальных точек (B, 1) и (C, 2). Заменим эти две материальные точки их материальным центром (A_1, 3). Теперь система состоит уже только из двух материальных точек (A, 1) и (A_1, 3), а ее барицентром по-прежнему служит точка O. Поэтому точка O лежит на AA_1, т. е. $AO \times BC = A_1$.

Но по правилу рычага, если его применить к системе из двух точек (B, 1) и (C, 2), будем иметь:

$$1 \cdot A_1B = 2A_1C,$$

откуда $A_1C = \frac{1}{3} BC$, что и требовалось доказать.

Заметим, что по правилу рычага (применительно к системе из двух материальных точек (A, 1) и (A_1, 3)) следует еще, что $AO = 3OA_1$.

2. Многие геометрические задачи можно решить с помощью замечательной механической *теоремы Лагранжа* о моментах инерции.

Моментом инерции системы n материальных точек

$$(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$$

относительно точки S называется сумма

$$I_s = m_1 \cdot SA_1^2 + \ldots + m_n A_n^2,$$

или, короче:

$$I_s = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot S A_k^2.$$

Теорема Лагранжа. *Момент инерции I_s любой системы материальных точек $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$ относительно произвольной данной точки S равен сумме двух величин: момента инерции I_z системы относительно ее барицентра и момента инерции материального центра системы относительно точки S, т. е.*

$$I_s = I_z + (m_1 + \ldots + m_n) SZ^2.$$

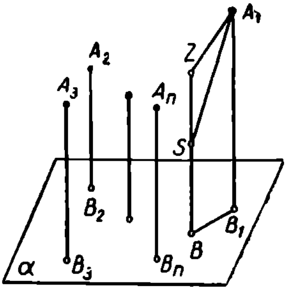


Рис. 244.

Доказательство. Пусть в пространстве имеется n материальных точек $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$ и Z — центр их тяжести.

Пусть S — произвольная точка, отличная от точки Z.

Имеется бесконечно много плоскостей, перпендикулярных к прямой ZS. Среди них всегда можно выбрать такую плоскость α, чтобы все точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ были расположены по одну сторону от нее (см. рис. 244).

Обозначим через

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, z, s$$

соответственно расстояния точек

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, Z, S$$

от плоскости α, через

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, B —$$

проекции точек

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, Z$$

на плоскость α. Пусть $B_1 \neq B$. Рассмотрим четырехугольник BB_1A_1Z. Это трапеция (или прямоугольник). Вычислим ZA_1.

$$ZA_1^2 = (z_1 - z)^2 + BB_1^2. \tag{1}$$

Рассматривая четырехугольник BB_1A_1S, найдем, что

$$SA_1^2 = (z_1 - s)^2 + (BB_1)^2. \tag{2}$$

Отсюда

$$SA_1^2 - ZA_1^2 = (z_1 - s)^2 - (z_1 - z)^2 = (z - s)(2z_1 - z - s) =$$
$$= (z - s)[(z - s) + 2(z_1 - s)] = (z - s)^2 + 2(z - s)(z_1 - z),$$

т. е.

$$SA_1^2 - ZA_1^2 = SZ^2 + 2(z - s)(z_1 - z). \tag{3}$$

Умножая обе части на m_1, получим:

$$m_1 \cdot SA_1^2 - m_1 \cdot ZA_1^2 = m_1 \cdot SZ^2 + 2(z - s)(m_1 z_1 - m_1 z). \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что равенства (1) — (4) верны как в том случае, когда четырехугольник BB_1A_1S есть трапеция, так и в том случае, когда это прямоугольник. Случай, когда B_1 совпадает с B, т. е. когда A_1 — на прямой ZS, тоже не составляет исключения.

Повторяя те же рассуждения относительно точек $A_2, A_3, \ldots, A_n$, получим такие равенства:

$$m_2 \cdot SA_2^2 - m_2 ZA_2^2 = m_2 SZ^2 + 2(z-s)(m_2 z_2 - m_2 z)$$

$$\cdots$$

$$m_n \cdot SA_n^2 - m_n ZA_n^2 = m_n SZ^2 + 2(z-s)(m_n z_n - m_n z).$$

Сложив все эти равенства и полагая

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M,$$

получим:

$$I_s - I_z = M \cdot SZ^2 + 2(z-s) \cdot [(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n) - Mz].$$

Но точка Z есть центр тяжести материальных точек

$$(A_1,\ m_1),\ (A_2,\ m_2),\ \ldots,\ (A_n,\ m_n),$$

и поэтому, как известно,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\ z.$$

Итак,

$$I_s - I_z = M \cdot SZ^2,$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р. Зная медианы m_1, m_2, m_3 треугольника ABC и радиус R описанной окружности, вычислим расстояние между точкой пересечения медиан и центром описанной окружности.

Пусть S — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан. Поместим в вершинах треугольника равные массы (по 1 единице). Барицентром этой системы будет точка M.

По теореме Лагранжа

$$I_s = I_м + 3SM^2.$$

Но

$$I_s = 3R^2,\ \ I_м = \left(\frac{2}{3} m_1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} m_2\right)^2 + \left(\frac{2}{3} m_3\right)^2.$$

Поэтому

$$SM^2 = \frac{1}{3}(I_s - I_м) = R^2 - \frac{4}{27}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right).$$

Более полные сведения о теореме Лагранжа можно найти, например, в книге [7].

3. Важный пример приложения механики к геометрии представляют следующие две теоремы.

П е р в а я   т е о р е м а   Г ю л ь д е н а. *Если поверхность образована вращением некоторой линии вокруг оси, причем линия лежит в одной плоскости с осью и целиком по одну сторону от оси, то площадь этой поверхности равна произведению длины линии на длину окружности, описанной центром тяжести линии.*

Докажем эту теорему последовательно для случаев, когда образующая линия есть: 1) отрезок; 2) ломаная; 3) произвольная кривая (имеющая длину).

1) Случай отрезка. Центром тяжести отрезка будем называть середину этого отрезка. Отрезок может описать при вращении около оси: а) боковую поверхность цилиндра (рис. 245, *а*); б) боковую поверхность конуса (рис. 245, *б*); в) боковую поверхность усеченного конуса (рис. 245, *в*); г) круг (рис. 245, *г*) и д) кольцо (рис. 245, *д*).

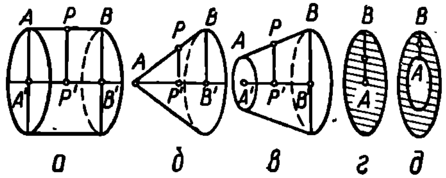


Рис. 245.

В случае *а*):

$$S=2\pi\cdot(AA')(AB).$$

Если P — середина отрезка AB, т. е. центр тяжести образующей линии, то $PP'=AA'$, так что $2\pi\cdot(AA')$ — длина окружности, описываемой центром тяжести.

В случае *б*):

$$S=\frac{1}{2}2\pi(BB')\cdot(AB)=2\pi\left[\frac{1}{2}(BB')\right](AB)=2\pi\cdot(PP')\cdot(AB).$$

Здесь $2\pi\cdot(PP')$ — длина окружности, описываемой центром тяжести данного отрезка.

В случае *в*):

$$S=\frac{1}{2}[2\pi\cdot(AA')+2\pi(BB')]\cdot(AB)=\pi[(AA')+(BB')]\cdot(AB)=$$
$$=\pi\cdot 2\cdot(PP')(AB)=2\pi(PP')(AB),$$

и теорема опять справедлива.

В случае *г*):

$$S=\pi\cdot(AB)^2=\pi(AB)\cdot(AB)=2\pi(AP)\cdot(AB).$$

В случае *д*):

$$S=\pi\cdot(OB)^2-\pi(OA)^2=\pi[(OB)^2-(OA)^2]=$$
$$=\pi[(OB)+(OA)][(OB)-(OA)]=\pi[2(OA)+(AB)]\cdot(AB)$$
$$2\pi\left[(OA)+\frac{1}{2}(AB)\right]\cdot(AB)=2\pi(OP)(AB).$$

2) Случай ломаной линии. Пусть ломаная $AA_1A_2\ldots A_{n-1}B$ вращается около оси xx. Обозначим площади поверхностей, образуемых вращением отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$, соответственно через $S_1, S_2, \ldots, S_n$, длины этих отрезков — соответственно через $l_1, l_2, \ldots, l_n$, а расстояния от их центров тяжести до оси вращения — через $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Тогда согласно предыдущему $S=S_1+S_2+\cdots+$
$+S_n=2\pi h_1l_1+2\pi h_2l_2+\cdots+2\pi h_nl_n=2\pi\cdot(h_1l_1+h_2l_2+\cdots+h_nl_n)$.

В механике (см. [7], стр. 82) доказывается, что расстояние центра тяжести ломаной линии от оси вращения выражается (в наших обозначениях) числом

$$h=\frac{h_1l_1+h_2l_2+\cdots+h_nl_n}{l_1+l_2+\cdots+l_n}.$$

Значит,

$$S=2\pi h\cdot(l_1+l_2+\cdots+l_n)=2\pi hl,$$

где l — периметр данной ломаной линии.

3) Случай произвольной плоской линии.

Впишем в данную линию AB ломаную $AA_1A_2\ldots A_{n-1}B$, и пусть $Z^{(n)}$ — ее центр тяжести, а $S^{(n)}$ — площадь поверхности, образованной ее вращением вокруг оси xx. Будем затем неограниченно увеличивать число (n) звеньев этой ломаной, и притом так, чтобы длина наибольшего звена стремилась к нулю. При этом обычно оказывается, что точки $Z^{(n)}$ стремятся к определенному предельному положению Z, а числа $S^{(n)}$ — к некоторому предельному значению S; более того, Z и S получаются одни и те же при любом выборе указанной здесь последовательности вписанных ломаных.

Точку Z называют центром тяжести линии AB, а число S — площадью поверхности, образованной вращением этой линии вокруг оси xx. Таким образом, при $n\to\infty$ можно написать:

$$Z^{(n)}\leftrightarrow Z,\quad S^{(n)}\to S. \tag{1}$$

Если l — длина линии AB и z — расстояние от ее центра тяжести Z до оси xx, а $l^{(n)}$ и $z^{(n)}$ — аналогичные величины для вписанной ломаной $AA_1A_2\ldots A_{n-1}B$, то при $n\to\infty$

$$l^{(n)}\to l \text{ и } Z^{(n)}\to z. \tag{2}$$

В силу установленного в случае 2), имеем:

$$S^{(n)}=2\pi\cdot z^{(n)}\cdot l^{(n)}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$ и учитывая (1) и (2), получим:

$$S=2\pi z\cdot l,$$

что и требовалось показать.

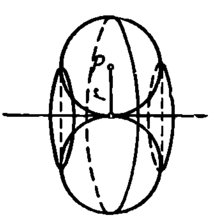


Рис. 246.

Пример 1. Найти площадь поверхности, описываемой окружностью радиуса r при ее вращении около касательной прямой (рис. 246).

Центр тяжести окружности — в ее геометрическом центре. Поэтому

$$S=2\pi r\cdot 2\pi r=4\pi^2 r^2.$$

Пример 2. Найти положение центра тяжести полуокружности радиуса r.

Представим себе (рис. 247), что полуокружность вращается около ее диаметра AB. Тогда поверхность вращения есть сфера, так что $S=4\pi r^2$. Длина окружности, описываемой центром тяжести, равна $2\pi h$, где h — расстояние центра тяжести P от AB, длина данной полуокружности равна πr. Поэтому, согласно теореме Гюльдена, $4\pi r^2 = 2\pi h \cdot \pi r$,
откуда

$$h=\frac{2r}{\pi}\approx 0{,}64\, r.$$

Вторая теорема Гюльдена. *Объем тела, образуемого вращением плоской пластинки около оси, лежащей в ее плоскости* (и не имеющей общих точек с пластинкой), *равен произведению*

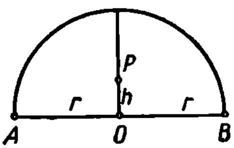


Рис. 247.

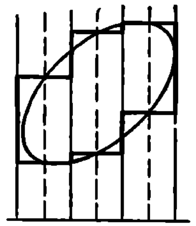


Рис. 248.

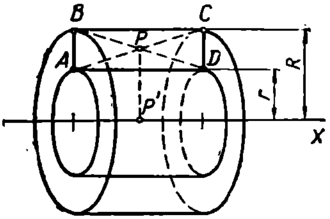


Рис. 249.

площади пластинки на длину окружности, описываемой центром тяжести пластинки.

Пластинку произвольной формы можно приближенно представить посредством прямоугольников (рис. 248) и соответственно тело вращения — посредством тел, образуемых вращением этих прямоугольников около оси, параллельной их двум сторонам. Поэтому основой доказательства служит рассмотрение случая вращения прямоугольника около оси, параллельной двум его сторонам.

Пусть (рис. 249) прямоугольник $ABCD$ вращается около оси xx.

Объем v тела вращения можно представить как разность объемов цилиндров, общей осью которых служит прямая xx, а образующими соответственно отрезки AD и BC. Обозначая радиусы этих цилиндров через r и соответственно R, получим:

$$v=\pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h (R^2 - r^2).$$

Ясно, что площадь пластинки

$$S=(R-r)\cdot h,$$

где $h=BC$.

Центр тяжести P прямоугольника (пересечение его диагоналей) находится от оси вращения на расстоянии

$$r+\frac{R-r}{2}=\frac{1}{2}(R+r).$$

Поэтому длина упомянутой в теореме окружности

$$c=2\pi\frac{R+r}{2}=\pi(R+r).$$

Следовательно,

$$S\cdot c=\pi(R^2-r^2)\cdot h=v,$$

что и требовалось доказать.

Этот результат легко распространяется на тот случай, когда пластинка составлена из некоторого конечного числа прямоугольников, у каждого из которых две стороны параллельны оси вращения.

Если $S_i (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — площади таких прямоугольников, y_i — расстояния центров тяжести этих прямоугольников от оси xx, то согласно предыдущему

$$v=\sum_{i=1}^{n}v_i=\sum_{1}^{n}2\pi y_iS_i=2\pi\frac{\sum y_iS_i}{S}\cdot S,$$

где $S=\sum_{i=1}^{n}S_i$, т. е. площадь данной пластинки.

Известно (это обычно доказывается в аналитической геометрии), что выражение

$$\frac{\sum y_iS_i}{\sum S_i}$$

определяет расстояние y центра тяжести рассматриваемой фигуры от оси XX. Следовательно, и в этом случае

$$v=2\pi yS,$$

где y — радиус окружности, описываемой центром тяжести фигуры.

В справедливости второй теоремы Гюльдена для того случая, когда тело описывается пластинкой, ограниченной *произвольным* контуром, можно убедиться, после сказанного, путем обычного предельного перехода.

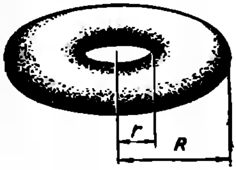


Рис. 250.

Если известно положение центра тяжести вращающейся пластинки, то формула Гюльдена позволяет найти объем тела вращения. Обратно, зная объем тела вращения, по этой формуле можно определять положение центра тяжести плоской фигуры.

Пример 1. Определить объем *тора* (рис. 250), зная его внешний радиус R и внутренний радиус r.

Тор можно представлять как результат вращения круга радиуса $\frac{R-r}{2}$ около некоторой оси xx. Применяя теорему Гюльдена, получим:

$$v=\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\cdot 2\pi\frac{R+r}{2}=\frac{\pi^2}{4}(R+r)(R-r)^2.$$

Пример 2. Определить положение центра тяжести полукруга.

При вращении полукруга радиуса r около его диаметра AB (рис. 251) образуется шар, объем которого равен $\frac{4}{3}\pi r^3$. Ясно, что центр тяжести Z полукруга находится на его оси симметрии OZ. Если z — расстояние центра тяжести от диаметра AB, то Z описывает окружность, длина которой равна $2\pi z$. Площадь же пластинки равна $\frac{1}{2}\pi r^2$. Следовательно, по теореме Гюльдена

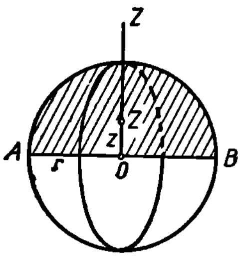


Рис. 251

$$\frac{4}{3}\pi r^3=2\pi z\cdot\frac{1}{2}\pi r^2=\pi^2 r^2 z.$$

Отсюда

$$z=\frac{4r}{3\pi}\approx 0{,}4\,r.$$

§ 39. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. В последнее время все более настойчиво пропагандируется использование векторных методов в школьном преподавании геометрии. Привлечение основных понятий из векторного исчисления позволяет значительно упростить решение некоторых задач элементарной геометрии. Напомним здесь простейшие сведения из векторной алгебры, наиболее полезные для применения в элементарной геометрии.

1) Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются *равными* ($\vec{a}=\vec{b}$), если они: а) коллинеарны, т. е. лежат на одной и той же или на параллельных прямых; б) одинаково направлены и в) имеют равные длины.

2) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два каких-либо вектора, O — какая-либо точка. Если $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, то вектор $\overrightarrow{OB}$ (и каждый равный ему) называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, то вектор $\vec{b}$ называется *разностью* векторов $\vec{c}$ и $\vec{a}$. Легко проверить, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливы следующие формулы:

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (свойство сочетательности),

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство переместительности).

3) Произведение $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ определяется как такой вектор $\vec{a'}$, который: а) коллинеарен вектору $\vec{a}$; б) имеет длину $|\lambda|a$, где a — длина вектора $\vec{a}$; с) одинаково направлен с вектором $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлен вектору $\vec{a}$, если $\lambda<0$; произведение $0\cdot a$ понимают как нулевой вектор, т. е. вектор, конец которого совпадает с началом.

Выражение $\frac{\vec{a}}{\lambda}$, естественно, понимают как произведение $\frac{1}{\lambda}\cdot\vec{a}$.

4) Легко проверить, что если точки A и B таковы, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, то положение центра тяжести M материальных точек (A, m) и (B, n) (т. е. точки M отрезка AB, для которой $m\cdot\overrightarrow{AM}=n\cdot\overrightarrow{MB}$) определяется вектором

$$\overrightarrow{OM}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n}.$$

Аналогично, если имеются еще точка C и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, то положение центра тяжести Z трех материальных точек (A, m), (B, n), (c, p) определяется по формуле:

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}}{m+n+p}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если Z — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $OZ=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$. Доказательство этих простых фактов предоставляем читателю.

5) В элементарной геометрии весьма полезно понятие скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. Под этим понимают такое число, которое определяется по формуле

$$a\cdot b\cdot\cos\alpha,$$

где a, b — длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а α — угол между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Легко проверить, что скалярное умножение обладает многими свойствами обычного умножения:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительность),

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (распределительность),

$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательность относительно числового множителя).

2. Уже этих начальных сведений из векторной алгебры достаточно для решения разнообразных задач.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $A_1A_2 \ldots A_6$ (рис. 252) — какой-либо шестиугольник, плоский или пространственный. В треугольниках $A_6A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ... отмечаются их центры тяжести B_1, B_2, ..., B_6 (точки пересечения медиан). Докажем, что в шестиугольнике $B_1B_2 \ldots B_6$ противоположные стороны равны и параллельны.

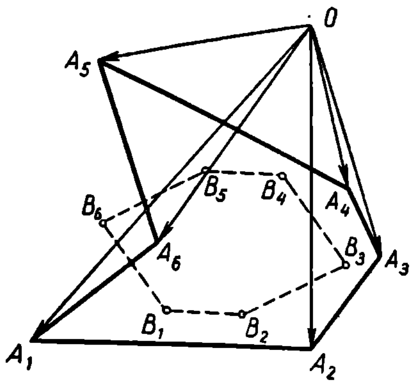


Рис. 252.

Действительно, выберем в пространстве произвольную точку O и обозначим векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_6}$ соответственно через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_6$. Тогда

$$\overrightarrow{OB_1}=\frac{\vec{a}_3+\vec{a}_1+\vec{a}_2}{3},\quad \overrightarrow{OB_2}=\frac{\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3}{3},\quad \ldots,\quad \overrightarrow{OB_6}=\frac{\vec{a}_5+\vec{a}_6+\vec{a}_1}{3}.$$

Рассмотрим в шестиугольнике $B_1B_2 \ldots B_6$ противоположные стороны B_1B_2 и B_4B_5:

$$\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OB_1}=\frac{\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3}{3}-\frac{\vec{a}_6+\vec{a}_1+\vec{a}_2}{3}=\frac{\vec{a}_3-\vec{a}_6}{3},$$

$$\overrightarrow{B_4B_5}=\overrightarrow{OB_5}-\overrightarrow{OB_4}=\frac{\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5}{3}-\frac{\vec{a}_4+\vec{a}_5+\vec{a}_6}{3}=\frac{\vec{a}_3-\vec{a}_6}{3},$$

т. е. $\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_4B_5}$.

Это и означает, что в шестиугольнике $B_1B_2 \ldots B_6$ противоположные стороны B_1B_2 и B_4B_5 равны и параллельны. Аналогичное доказательство пригодно и для двух других пар противоположных сторон.

Пример 2. В плоском четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Зная длины диагоналей, требуется вычислить расстояние MN между серединами каких-либо двух противоположных сторон четырехугольника (рис. 253).

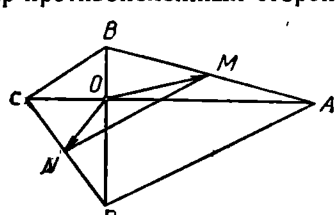


Рис. 253.

Для решения задачи обозначим через O точку пересечения диагоналей и выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$. Получим:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{MN}^2=(\overrightarrow{MN})^2=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})]^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})^2+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

Раскроем скобки и учтем, что скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов (например, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$) равно нулю, а скалярное произведение двух коллинеарных, но противоположно направленных векторов равно произведению их длин, взятому со знаком «—» (например, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-OA\cdot OC$). Поэтому после упрощения получим:

$$MN^2=AC^2+BD^2.$$

§ 40. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Большой теоретический и практический интерес представляют так называемые изопериметрические задачи.

Пусть имеется на плоскости некоторая пластинка, т. е. ограниченная замкнутая область D, и пусть L — ее граница. Обозначим длину границы через l, и это число будем называть периметром[1] пластинки D. Две пластинки равного периметра называют *изопериметрическими*. Площадь области D обозначим через $S(D)$.

Из множества всевозможных пластинок мы можем выбрать некоторый класс K изопериметрических пластинок. Например, можно рассматривать класс всех треугольников с данным периметром, или класс всех правильных многоугольников с данным периметром, или, наконец, класс *всевозможных* пластинок данного периметра.

Изопериметрическая задача ставится так: *В заданном классе K изопериметрических пластинок указать такую пластинку, которая имеет наибольшую площадь.* В зависимости от выбора того или иного класса K возникают различные изопериметрические задачи.

Изопериметрические задачи привлекали внимание еще древнегреческих геометров: Зенодора (II в. до н. э.), Паппа (III в. н. э.), Теона (IV в. н. э.) и др. Они, в частности, уже знали одно из наиболее интересных предложений теории изопериметров, так называемую главную изопериметрическую теорему: *из всех плоских пластинок данного периметра наибольшую площадь имеет круг.*

В течение XVIII—XIX вв. теория изопериметров была развита благодаря исследованиям швейцарских геометров Габриеля Крамера, Симона Люилье и в особенности Якоба Штейнера. Мощным методом

[1] Греческое слово περίμετρον (периметрон) и означает обвод, контур.

для решения сложных изопериметрических задач оказался аппарат вариационного исчисления, развитого на базе дифференциального и интегрального исчислений.

Решение некоторых изопериметрических задач несложно. Приведем в качестве примера один такой результат: из всех прямоугольников данного периметра P наибольшую площадь имеет квадрат.

Действительно, если одна из сторон прямоугольника равна x, то вторая равна $p-x$, где $p=\frac{1}{2}P$. Площадь прямоугольника равна:

$$S=x(p-x)=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p}{2}-x\right)^2,$$

откуда ясно, что площадь будет наибольшей, если $x=\frac{1}{2}p=\frac{1}{4}P$, т. е. когда прямоугольник — квадрат.

2. Остановимся теперь на главной изопериметрической теореме. Строгое ее доказательство было найдено лишь в конце прошлого века. Правда, Якоб Штейнер еще в 30-х годах прошлого столетия дал пять доказательств этой теоремы, но в каждом из них дополнительно подразумевается, что существование пластинки максимальной площади при данном периметре уже установлено. Строго говоря, это утверждение само нуждается в доказательстве.

Следуя Штейнеру, изложим здесь сущность первого из его доказательств основной изопериметрической теоремы (при указанном выше дополнительном допущении). Доказательство мы разобьем на несколько частей.

I. *Пластинка Ф с данным периметром (l), имеющая наибольшую площадь, является выпуклой.*

Действительно, если она не выпукла, то существует хорда AB (рис. 254), концы которой принадлежат пластинке, а внутренние точки — вне пластинки. Отразим дугу AmB контура от прямой AB получим дугу AnB. Рассмотрим новую пластинку с контуром $ApBnA$. Она того же периметра l, но большей площади.

II. *Если выпуклая пластинка Ф имеет при данном периметре (l) наибольшую площадь, а хорда AB делит контур на две части равной длины, то AB делит и пластинку на две равновеликие части.*

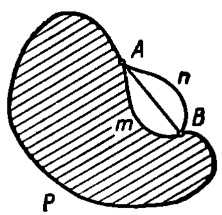


Рис. 254.

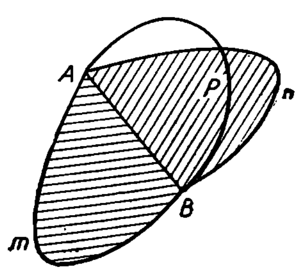


Рис. 255.

Действительно, пусть площадь пластинки Ф, т. е. $AmBpA$ (рис. 255) равна S; пусть существует хорда AB, которая разбивает пластинку Ф на две части: $AmBrA$ и $ApBrA$, причем дуги AmB и ApB равны по длине $\left(\text{каждая имеет длину } \frac{1}{2}l\right)$, но площади этих частей не равны. Пусть $AmBrA$ имеет бо́льшую площадь (так что ее площадь больше $\left.\frac{1}{2}S\right)$. Отразив $AmBrA$ от прямой AB, получим новую пластинку $AmBnA$, которая тоже имеет периметр l, но площадь которой уже больше S. Следовательно, пластинка Ф не является пластинкой наибольшей площади при данном периметре l (пластинка $AmBnA$ имеет бо́льшую площадь). Мы получили противоречие с условием.

III. *Если выпуклая пластинка Ф имеет при данном периметре (l) наибольшую площадь (S), то ее контур — окружность.*

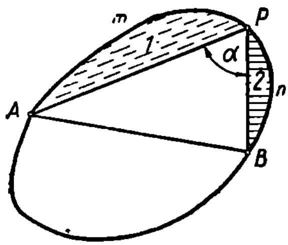


Рис. 256.

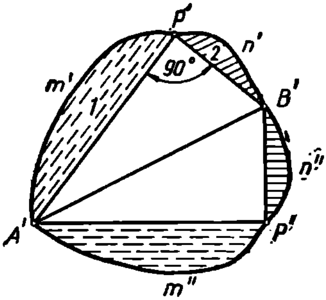


Рис. 257.

Действительно, проведем такую хорду AB, которая делит контур фигуры Ф на две дуги равной длины (рис. 256). Тогда (см. II) каждая из частей, на которые хорда AB делит пластинку Ф, имеет площадь $\frac{1}{2}S$. Если контур не окружность, то найдется на контуре такая точка P, что $\angle APB \neq 90°$. Дуга APB состоит из двух частей: AmP и PnB.

Построим пластинку Ф′ следующим образом:

1) строим сначала $\triangle A'P'B'$ так, чтобы $\angle A'P'B' = 90°$, $P'A' = PA$, $P'B' = PB$ (прямоугольный треугольник по двум катетам);

2) к нему пристраиваем вне $\triangle A'P'B'$ сегменты $A'm'P'A'$ и $P'n'B'P'$ (см. рис. 257), соответственно равные сегментам $AmPA$ и $PnBP$;

3) $\triangle A'P'B'$ вместе с построенными на его катетах сегментами отражаем от прямой $A'B'$, после чего и образуется пластинка Ф′.

Сравним площади треугольников $A'P'B'$ и APB.

$$(A'P'B') = \frac{1}{2}A'P' \cdot P'B' > \frac{1}{2}AP \cdot PB \cdot \sin(\angle APB) = (APB),$$

т. е.

$$(A'P'B') > (APB).$$

Но тогда ясно, что площадь фигуры Ф′ больше площади фигуры Ф. Итак, если Ф не круг, то существует пластинка Ф′ с тем же периметром, но с большей площадью.

IV. Из предложений I — III следует, что пластинка Ф, имеющая при данном периметре (l) наибольшую площадь, является кругом.

Этим завершается доказательство Штейнера. Доказательство, не предполагающее заранее существование пластинки наибольшей площади при данном периметре, было дано лет через 20 после смерти Штейнера.

3. В качестве еще одного примера изопериметрической задачи упомянем здесь задачу Крамера о шарнирном многоугольнике:

Рассматривая класс К всевозможных простых многоугольников с заданными по длине и по порядку сторонами, установить, какой из этих многоугольников имеет наибольшую площадь.

Наглядно можно себе представить картину так: требуется шарнирному многоугольнику, составленному из жестких стержней, придать такую форму, чтобы он охватывал максимальную площадь. Более двухсот лет назад Г. Крамер нашел решение этой задачи.

Оказывается, что из рассматриваемых многоугольников *наибольшую площадь будет иметь тот, около которого можно описать окружность.*

Задачи, аналогичные изопериметрическим, могут быть поставлены и в пространстве. Вот одна из наиболее важных:

Из всех тел с данной поверхностью выбрать такое, которое имеет наибольший объем. Рассуждая примерно так же, как при доказательстве главной изопериметрической теоремы, можно убедиться, что таким телом является шар. Подробнее об изопериметрических задачах рассказано в книге [48].

Вопросы для повторения

В чем состоит свойство аддитивности геометрической величины?

В чем состоит свойство монотонности геометрической величины?

В чем состоит свойство инвариантности геометрической величины?

Как изменяется длина отрезка при переходе от одной единицы измерения к другой?

Какая теорема о длине отрезка лежит в основе метода координат?

Перечислите известные вам употребительные меры длины.

Перечислите известные вам простейшие инструменты, служащие для измерения расстояний.

Напишите формулу Стюарта и разъясните смысл входящих в нее величин.

Как читается теорема Птолемея о сторонах и диагоналях вписанного четырехугольника?

Как читается теорема Эйлера о сторонах и диагоналях четырехугольника?

Какие инструменты или приборы применяются для измерения площади на плане?

Напишите формулу объема призматоида и разъясните смысл входящих в нее величин.

Каково принципиальное значение примера, приведенного Г. Шварцем?

В чем состоит идея определения понятия длины дуги по Борхардту — Минковскому?

Как можно определить понятие площади кривой поверхности, не пользуясь вписанием в нее многогранных поверхностей?

Дайте определение и приведите примеры равносоставленных плоских фигур и многогранников.

Как читается теорема Бояи — Гервина о равновеликих многоугольниках?

В чем состояла «третья проблема Гильберта»? Кто, когда и как ее решил?

Можно ли распространить теорему Бояи — Гервина на произвольные квадрируемые плоские фигуры?

Как формулируется принцип Кавальери на плоскости и в пространстве?

Что называется центром тяжести системы двух и нескольких материальных точек?

Как читается теорема Лагранжа о моменте инерции системы материальных точек?

Как читается теорема Гюльдена об объеме тела вращения?

Как читается теорема Гюльдена о поверхности тела вращения?

Задачи

К § 10—14

1. Докажите, что в шестиугольнике, противоположные стороны которого равны и параллельны, три диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

2. Биссектрисы углов B и C при основании равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке E и при продолжении встречают описанную около треугольника окружность в точках D и F. Докажите, что четырехугольник $EDAF$ — ромб.

3. Около правильного треугольника ABC описана окружность. Произвольно взятая точка M этой окружности соединена отрезками с вершинами треугольника. Докажите, что один из этих трех отрезков равен сумме двух других.

4. Стороны a, b, c треугольника связаны соотношением: $a^3+b^3=c^3$. Докажите, что треугольник остроугольный.

5. Вычислите сторону правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса r.

6. Как определить диаметр цилиндрического стержня посредством

штангенциркуля, ножки которого короче радиуса цилиндра, причем известна их длина?

7. Из точки M проведены к окружности две касательные MA и MB. На меньшей из дуг AB выбрана точка C. Касательная к окружности в точке C пересекает прямые AM и BM в точках D и E. Докажите, что периметр треугольника не зависит от выбора точки C.

8. Докажите: для того чтобы плоский четырехугольник $ABCD$ был прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки M, лежащей в его плоскости, выполнялось соотношение:

$$AM^2+CM^2=BM^2+DM^2.$$

9. Докажите следующую теорему (Штейнера): для того чтобы три перпендикуляра, восставленные к сторонам BC, AC и AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1, имели общую точку, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство:

$$AC_1^2+BA_1^2+CB_1^2=BC_1^2+CA_1^2+AB_1^2.$$

10. Какой угол при вершине будет иметь коническая поверхность, «изготовленная» из полукруга?

11. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15 *см*, а высота призмы — 20 *см*. Вычислите расстояние между стороной основания призмы и не пересекающей ее диагональю призмы.

12. Четыре шара лежат на столе, касаясь стола и друг друга. Три из них имеют радиус R. Какой радиус имеет четвертый шар?

13. На столе лежит тор, внутренний радиус которого r, а внешний R. На тор положен шар, касающийся плоскости стола. Вычислить радиус шара и радиус окружности его прикосновения к поверхности тора.

14. На поверхности шара начерчены четыре равные окружности, из которых каждая касается трех других. Найдите радиусы этих окружностей, если радиус шара R.

15. На столе лежат четыре шара радиуса R. Каждый из них касается двух других. На них положен пятый шар того же радиуса так, что этот шар касается остальных четырех шаров. Вычислите расстояние от плоскости стола до наиболее удаленной от нее точки пятого шара.

16. В куб с ребром a вложен шар, касающийся всех его граней. Затем вложено еще восемь равных шаров, из которых каждый касается первого шара и трех граней куба, сходящихся в одну вершину. Вычислите радиусы этих шаров.

К § 15—19

17. Выразите полные поверхности всех пяти правильных многогранников через ребро a.

18. Квадратная пластинка со стороной a повернута около ее центра на угол 30°. Вычислите площадь шестнадцатиугольника, покрываемого пластинкой в двух ее расположениях.

19. Докажите теорему Гиппократа: сумма площадей «луночек», лежащих между дугой полуокружности, построенной на гипотенузе как на диаметре, и дугами кругов, описанных на катетах того же прямоугольного треугольника как на диаметрах, равна площади данного треугольника.

20. Из каждой вершины квадрата, сторона которого равна a, проводится окружность радиуса a. Найдите площадь общей части четырех кругов, ограничиваемых этими окружностями.

21. Данного круга радиуса R касаются внешним образом три равные окружности, попарно касательные между собой. Найдите площадь криволинейного треугольника, ограниченного окружностью данного круга и дугами двух касательных к нему окружностей.

22. Основание AC треугольника ABC разделено точками B_1 и B_2 на три равные части так, что $AB_1=B_1B_2=B_2C$ (см. рис. 258). Через

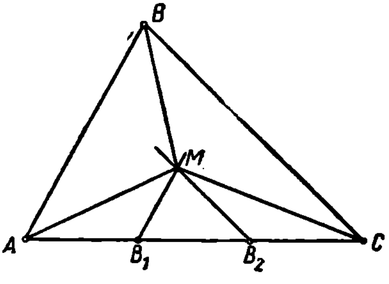


Рис. 258.

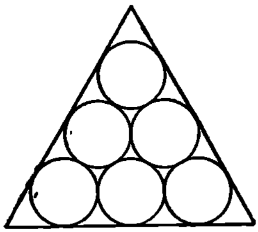


Рис. 259.

точку B_1 проведена прямая B_1M, параллельная AB, а через точку B_2 — прямая B_2M, параллельная CB. Докажите, что прямые AM, BM и CM делят площадь треугольника на три равные части.

23. Докажите, что если одна (и только одна) средняя линия плоского четырехугольника делит его площадь пополам, то этот четырехугольник есть трапеция.

24. В равносторонний треугольник вписаны круги одного и того же радиуса, как изображено на рис. 259. Найдите предел отношения суммы площадей вписанных кругов к площади треугольника при неограниченном возрастании числа кругов.

25. Основанием пирамиды с равными боковыми ребрами служит прямоугольник, стороны которого 6 *дм* и 8 *дм*. Высота пирамиды равна 2 *дм*. Вычислите площадь сечения, проведенного через диагональ основания пирамиды параллельно боковому ребру.

26. Докажите: если все плоские углы при одной вершине тетраэдра прямые, то квадрат площади грани, лежащей против этого трехгранного угла, равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственный аналог теоремы Пифагора).

27. В правильной шестиугольной призме проведены два параллельных сечения. Одно проходит через сторону основания призмы и ее

бо́льшую диагональ, другое делит ось призмы в отношении 1:3, считая от основания. Зная, что площадь первого сечения равна S, найдите площадь второго.

28. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения, проведенного через центр куба параллельно диагоналям двух смежных граней, исходящих из общей вершины.

К § 20—23

29. Плоскость делит боковые ребра треугольной пирамиды в отношениях λ_1, λ_2, λ_3, считая от вершины. Найдите отношение, в котором эта плоскость делит объем пирамиды.

30. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка. Докажите, что объем тетраэдра, вершинами которого служат концы этих отрезков, не зависит от положения отрезков на этих прямых.

31. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 *дм*, а боковая сторона равна 10 *дм*. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы по 45°. Вычислите объем пирамиды.

32. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобочная трапеция с параллельными сторонами a и b ($a>b$). Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом $\alpha=60°$. Вычислите объем пирамиды.

33. На плоскости, вокруг общей вершины, лежат шесть равных и последовательно касающихся друг друга конусов. На этих конусах лежит шар, касаясь их боковых поверхностей в точках, находящихся на окружностях оснований. Найдите отношение объема шара к сумме объемов конусов.

34. Сосуд, имеющий форму равностороннего конуса, обращенного вершиной книзу, наполнен водой до высоты h. Какого наибольшего радиуса может быть шар, чтобы он, будучи опущен в этот сосуд, покрылся водой?

35. Полый плавающий буй из железа (удельный вес 7,5) плавает в морской воде (удельный вес 1,027). Оказывается, что он погружен в воду только наполовину (в воде половина шара). Зная наружный диаметр шара $2R$, вычислите толщину стенки буя.

36. В шар радиуса R вписан куб. На его гранях, во внешней области куба, построены правильные пирамиды, вершины которых располагаются на поверхности шара. Вычислите объем построенного таким путем многогранника.

37. В шаре радиуса R сделано цилиндрическое отверстие, ось которого проходит через центр шара, а диаметр отверстия равен радиусу шара. Определите объем оставшейся части шара.

38. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a>b$). Проведена плоскость через сторону большего основания и противоположную ей сторону меньшего основания. В каком отношении разделит эта плоскость объем пирамиды?

39. Косоусеченной призмой называется часть прямой призмы, заключенная между плоскостью ее основания и плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы. Известны три боковых ребра h_1, h_2 и h_3 треугольной косоусеченной призмы и площадь ее основания q. Чему равен объем косоусеченной призмы? Найдите аналогичную формулу для объема n-угольной косоусеченной призмы.

40. Выразите катеты прямоугольного треугольника через его гипотенузу c и радиус вписанной окружности r.

К § 24

41. Найдите угол развертки конуса, зная, что боковая его поверхность вдвое больше площади основания.

42. Определите радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу, зная толщину линзы $2a$, поверхность линзы S и диаметр линзы $2R$.

43. Из данного куска металла можно отлить шар или куб. Какое из этих изделий будет иметь бо́льшую поверхность?

К § 25

44. Начертите два таких неравных треугольника ABC и $A'B'C'$, чтобы стороны AB и $A'B'$ были равны и чтобы были равны проведенные к ним высоты. Укажите, как разрезать треугольники на соответственно равные части.

45. Как произвольный выпуклый четырехугольник превратить в равносоставленный треугольник? Разрежьте четырехугольник и треугольник на соответственно равные части.

46. Как разрезать данную (начерченную) трапецию на части, из которых можно сложить треугольник?

47. Как разрезать трапецию прямой, пересекающей параллельные ее стороны, на две равновеликие части?

48. Докажите, что две прямые призмы, основания которых равновелики, а высоты равны, равносоставлены.

49. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно их середины D_1, A_1, B_1 и C_1. Во сколько раз площадь четырехугольника, образуемого прямыми AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, меньше площади данного параллелограмма?

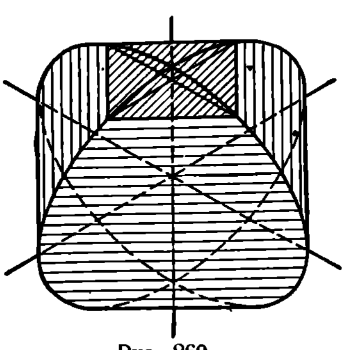


Рис. 260.

К § 26

50. Пользуясь методом параллельных сечений, выведите формулу объема шарового слоя.

51. Два равных круглых цилиндра радиуса R расположены в пространстве так, что их оси пересекаются под прямым углом. Тело, лежащее внутри обоих цилиндров, напоминает по форме подушку (рис. 260). Вычислите объем этого тела.

К § 27

52. Докажите на основании механических соображений, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

53. В произвольном шестиугольнике (плоском или пространственном) $A_1A_2 \dots A_6$ отмечены середины сторон A_1A_2, A_2A_3, ... A_6A_1 и полученные точки B_1, B_2, ..., B_6 соединены через одну так, что образуются два треугольника $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$. Докажите, что точки пересечения медиан этих двух треугольников совпадают.

54. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки P, лежащей на окружности, до вершин треугольника одна и та же, независимо от положения точки P на окружности.

55. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На ней выбрана произвольная точка P. Докажите, что сумма PA^2+PB^2+ $+PC^2+PD^2$ не зависит от выбора точки P на сфере.

56. Правильный шестиугольник, сторона которого равна a, вращается около одной из его сторон. Найдите объем тела вращения.

57. Найдите площадь поверхности, описываемой полуокружностью диаметра d при ее вращении около касательной, проведенной в конце полуокружности.

К § 28

58. Докажите: всегда существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

59. Дан произвольный параллелограмм $ABCD$. Выбрав произвольно в пространстве точку P, строим последовательно: точку P_1, симметричную точке P относительно A_1; точку P_2, симметричную P_1 относительно A_2; точку P_3, симметричную P_2 относительно A_3; точку P_4, симметричную точке P_3 относительно A_4. Докажите, что точка P_4 совпадает с точкой P.

60. Применяя скалярное умножение, докажите: а) теорему Пифагора; б) теорему косинусов.

61. Используя скалярное умножение векторов, докажите: а) теорему о трех перпендикулярах; б) теорему о двух перпендикулярах.

62. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные из концов его основания, взаимно перпендикулярны. Найдите угол при вершине треугольника.

63. Зная все 6 ребер произвольного тетраэдра, найдите угол между двумя данными противоположными ребрами.

64. В некотором пространственном четырехугольнике оказалось, что сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон. Докажите, что у этого четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны.

ГЛАВА IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 41. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Геометрическим преобразованием фигуры Ф называют правило, условие, закон, в силу которого каждой точке M этой фигуры ставится в соответствие некоторая точка M'. Совокупность всех точек M' образует некоторую фигуру Ф′, которая называется образом данной фигуры Ф в данном преобразовании. Точка M называется при этом прообразом точки M'. Часто в качестве фигуры Ф рассматривают плоскость или все пространство.

Преобразования фигур встречаются в природе (движения небесных тел, изгибание дерева под действием ветра, рост живых организмов, геологические изменения земной поверхности), в науке и технике (проектирование изображения с пленки на экран, превращение отрезка стальной проволоки в пружину, деформация опоры под влиянием нагрузки, перенесение контуров с земной поверхности на карту). В природе и технике преобразование какой-либо фигуры есть процесс изменения ее формы, размеров или положения. В отличие от этого геометрия рассматривает только начальное и конечное состояния фигуры, оставляя в стороне вопрос о промежуточных ее состояниях.

Преобразование называется взаимно однозначным или одноoднозначным (1—1-значным), если каждая точка фигуры-образа имеет только один прообраз. Если, например, проектировать ортогонально полусферу на плоскость ее граничной окружности (рис. 261), то полусфера преобразуется в круг, причем в каждую точку M' этого круга проектируется только одна точка M полусферы. Значит, такая проекция есть 1—1-значное преобразование.

Но если проектировать поверхность *целой* сферы на какую-нибудь диаметральную ее плоскость (рис. 262), то взаимная однозначность нарушается, так как только граничные точки проекции имеют по одному прообразу, а каждая внутренняя точка M' проекции может рассматриваться как проекция двух различных точек M_1 и M_2 данной сферы.

Простейшим примером одноодназначного геометрического преобразования служит преобразование **T**, при котором каждой точке M фигуры Φ ставится в соответствие эта же точка. Ясно, что при этом образ Φ' фигуры Φ есть та же фигура Φ. Такое преобразование называется т о ж д е с т в е н н ы м преобразованием.

Пусть некоторое преобразование Π_1 преобразует точку M в точку M', а преобразование Π_2 преобразует M' в M''. Тогда преобразование Π, которое преобразует M в M'', называют п р о и з в е д е н и е м преобразований Π_1 и Π_2 и обозначают символом $\Pi_2 \cdot \Pi_1$. Понятие об умножении преобразований

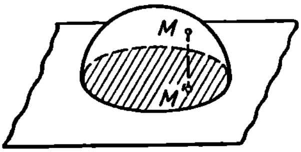


Рис. 261.

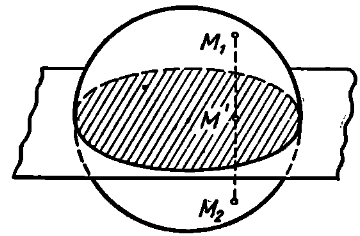


Рис. 262.

можно распространить и на большее число преобразований: произведением двух или нескольких преобразований называют такое преобразование, которое возникает в результате последовательного выполнения всех данных преобразований.

Пусть даны три преобразования: Π_1, Π_2 и Π_3, причем $\Pi_1(M)=M'$, $\Pi_2(M')=M''$, $\Pi_3(M'')=M'''$, т. е. Π_1 преобразует точку M в точку M', Π_2 — точку M' в точку M'', Π_3 — M'' в M'''. Тогда $\Pi_2[\Pi_1(M)]=\Pi_2(M')=M''$, $\Pi_3(M'')=M'''$, так что $\Pi_3\{\Pi_2[\Pi_1(M)]\}=M'''$. С другой стороны, $\Pi_1(M)=M'$, $\Pi_3\Pi_2(M')=\Pi_3(M'')=M'''$, так что $\Pi_3\Pi_2[\Pi_1(M)]=M'''$.

Следовательно, для любой точки M

$$\Pi_3\{\Pi_2\Pi_1(M)\}=\Pi_3\Pi_2\{\Pi_1(M)\},$$

т. е. преобразования $\Pi_3(\Pi_2\Pi_1)$ и $(\Pi_3\Pi_2)\Pi_1$ преобразуют каждую точку в одну и ту же точку. Это свойство преобразований называют ассоциативностью или с о ч е т а т е л ь н о с т ь ю.

Пусть Π — какое-либо взаимно однозначное преобразование. Тогда по определению для каждой точки M' образа существует единственный прообраз M, так что, помимо данного соответствия $M \to M'$, возникает также соответствие $M' \to M$. Это новое преобразование, которое ставит в соответствие каждой точке M' фигуры Φ' прообраз M этой точки, называют о б р а т н ы м данному преобразованию Π и обозначают знаком Π^{-1}. Ясно, что произведение данного преобразования на обратное к нему есть тождественное преобразование: $\Pi \cdot \Pi^{-1} = \mathbf{T}$.

Важнейшим видом взаимно однозначных геометрических преобразований являются д в и ж е н и я.

§ 42. ДВИЖЕНИЕ

1. Движения образуют специальный класс преобразований, играющих особую роль в различных науках и их приложениях и широко распространенных в области природных и технических явлений.

Сущность понятия движения ясна каждому из его жизненного и учебного опыта. В геометрии можно рассматривать понятие движения как первичное и, как для такового, давать «точное и для математических целей полное» его описание в форме соответствующей системы аксиом.

В школьном курсе геометрии понятие «движение» также употребляется в качестве первичного понятия. С его помощью определяют затем равенство фигур: фигуры называются равными, если их можно с о в м е с т и т ь.

Относя детальное изучение логической стороны вопроса о движениях к курсу оснований геометрии, приведем некоторые соображения относительно этого понятия и его приложений.

Как уже отмечалось, в геометрии движение, как и всякое преобразование, обычно рассматривается как соответствие между точками двух фигур. Эти фигуры иногда удобно представлять себе как начальное и конечное положения одной и той же фигуры. Употребляя выражение: «Фигура Ф совмещается (может быть совмещена) с фигурой Ф′» или: «Фигура Ф переходит в фигуру Ф′», под этим понимают, что существует движение, ставящее фигуре Ф в соответствие фигуру Ф′.

В общих вопросах удобно рассматривать движение всего пространства. Говоря о движении пространства, мы подразумеваем, что оно обладает следующими свойствами, которые можно понимать как а к с и о м ы д в и ж е н и я.

I. Всякое данное движение переводит каждую точку пространства в одну-единственную определенную точку, а две различные точки — в две различные же точки. Иными словами, *движение есть 1—1-значное преобразование.*

II. Любая данная точка пространства (A) может быть совмещена с любой другой данной точкой (A'). Кроме этого, можно любую данную прямую a, проходящую через первую точку (A), совместить с любой данной прямой a', проходящей через вторую точку (A'), и, сверх того, можно данный луч $\bar{a}$ прямой a, исходящий из точки A, совместить с любым из двух лучей прямой a', исходящих из точки A'. Наконец, при этом можно любую полуплоскость, исходящую из прямой a, совместить с любой данной полуплоскостью, исходящей из прямой a'. При соблюдении всех этих условий каждая точка P совместится с единственной, вполне определенной точкой P'.

III. *Результат двух последовательных движений тоже есть движение.*

IV. *Если два различных движения преобразуют некоторый луч* $\bar{a}$ *в некоторый луч* $\bar{a}'$, *то оба этих движения преобразуют каждую точку луча* $\bar{a}$ *в одну и ту же точку луча* $\bar{a}'$.

V. *Движение сохраняет порядок точек на прямой*[1].

VI. *Движение сохраняет ориентацию каждой тройки некомпланарных векторов*[2].

Аксиому II можно сформулировать значительно короче, если воспользоваться понятием р е п е р а. Репером называют соединение прямой $\bar{a}$, ее луча $\overline{OA}$ и полуплоскости α, исходящей из прямой a. Вместо аксиомы II можно сформулировать следующее предложение:

II′. *Если даны два произвольных репера* $R\{a, \overline{OA}, \alpha\}$ и $R'\{a', \overline{O'A'}, \alpha'\}$ (рис. 263), *то существует* и притом единственное *движение D, переводящее репер R в репер R'.*

Вместо реперов R и R' могут быть заданы упорядоченные тройки соответственных неколлинеарных (т. е. не лежащих на одной прямой) точек

$$A,\ B,\ C \text{ и } A',\ B',\ C',$$

так как этим определяются соответственные лучи $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ и соответственные полуплоскости $(AB,\ C)$ и $(A'B',\ C')$ (рис. 264).

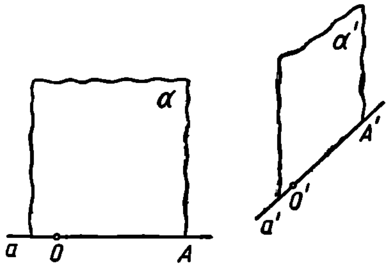


Рис. 263.

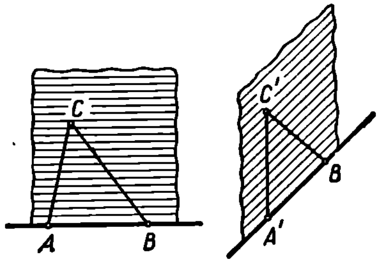


Рис. 264.

Понятно, тройки точек A, B, C и соответственно A', B', C' не произвольны: должно существовать движение, переводящее одновременно A в A', B в B' и C в C'.

2. Две фигуры Φ и Φ' называются р а в н ы м и, если существует движение, которое переводит одну из них в другую. Отношение равенства фигур Φ и Φ' будем записывать так:

$$\Phi = \Phi'.$$

[1] Понятие порядка точек на прямой является первичным и в свою очередь характеризуется аксиомами (см. стр. 16).

[2] Понятие ориентации тройки некомпланарных векторов дается обычно в курсах аналитической геометрии, и мы не будем поэтому возвращаться к его определению. Отметим только, что это понятие, помимо наглядного описания (посредством «часовой стрелки», «правила буравчика» и т. п.), допускает точное математическое определение (см. об этом, например, [28], § 134).

Понятия движения и равенства широко используются в элементарной геометрии.

Располагая понятиями движения и равенства, можно сравнивать отрезки (а также углы), складывать их или вычитать. Приведем соответствующие определения.

Говорят, что отрезок AB б о л ь ш е отрезка $A'B'$, и пишут $AB > A'B'$, если существует такая внутренняя точка C' отрезка AB, что $AC' = A'B'$ (или $BC' = A'B'$).

Если $AB > A'B'$, то говорят, что отрезок $A'B'$ м е́ н ь ш е отрезка AB, и пишут $A'B' < AB$.

Отрезок AB называется с у м м о й двух других отрезков KL и MN, если на отрезке AB существует такая точка C (рис. 265), что имеют место следующие равенства отрезков: $AC = KL$, $CB = MN$. При этом пишут: $AB = KL + MN$.

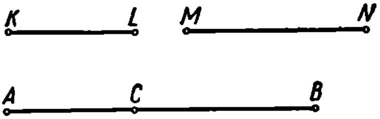


Рис. 265.

Если $a = b + c$, т. е. отрезок a есть сумма отрезков b и c, то отрезок b называют р а з н о с т ь ю отрезков a и c и пишут: $b = a - c$.

Располагая для отрезков и углов понятиями «больше» и «меньше», а также понятиями «сумма» и «разность», можно доказать ряд употребительных теорем о соотношениях между элементами треугольника. Например: против большего угла в треугольнике лежит и большая сторона; каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.

3. Отметим теперь некоторые важные свойства движения, которые вытекают из приведенных аксиом и определений.

1) *Точки, лежащие на одной прямой, переходят при движении опять в точки, лежащие на одной прямой* (свойство коллинеарности).

Действительно, пусть точки A, B и C одной прямой переходят при некотором движении соответственно в точки A', B' и C'. Пусть для определенности точка B лежит между точками A и C, так что

$$AC = AB + BC. \qquad (*)$$

Если бы точки A', B' и C' не лежали на одной прямой, то, как известно, имело бы место неравенство: $A'C' < A'B' + B'C'$. Но так как $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $AC = A'C'$, то это означало бы, что $AC < AB + BC$, а это противоречит равенству (*).

2) *Движение преобразует каждый луч в некоторый луч.*

Это вытекает из определения луча (стр. 16) и аксиомы V движения (стр. 211).

3) *Точки, лежащие в одной плоскости, переходят при любом движении опять в точки, лежащие в одной плоскости* (свойство к о м п л а н а р н о с т и движения).

Действительно, пусть (рис. 266) точки A, B, C и D лежат в одной плоскости α. Пусть некоторое движение переводит их соответственно в точки A', B', C' и D'. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD. Каждая точка прямой AB, в том числе и точка O, должна перейти в некоторую точку прямой $A'B'$ (см. свойство 1). Таким же образом заключаем, что точка O должна перейти в точку прямой $C'D'$. Но так как точка O может перейти только в одну точку O' (см. аксиому I), то прямые $A'B'$ и $C'D'$ пересекаются в точке O', а это и значит, что точки A', B', C' и D' лежат в одной плоскости.

Примечание. Может оказаться, что $AB \parallel CD$. Тогда наше доказательство надо применять к прямым AC и BD. А если и эти

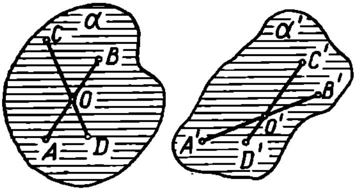


Рис. 266.

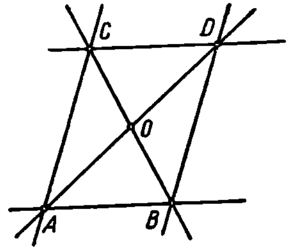


Рис. 267.

прямые окажутся параллельными (рис. 267), то можно будет воспользоваться прямыми AD и BC.

Из приведенных предложений можно вывести, что *движение преобразует отрезок в отрезок, угол в угол, треугольник в треугольник* и т. п. При этом, по самому определению равенства, *фигура преобразуется всегда в равную ей фигуру*. В частности, прямой угол переходит в прямой угол, так что *перпендикулярность прямых сохраняется при каждом движении*.

4. В качестве важного примера применения понятия движения можно указать на известные признаки равенства треугольников. Рассмотрим первый из этих признаков: если в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Доказательство. Условие $\angle BAC = \angle B'A'C'$ означает, по определению, что существует некоторое движение D, переводящее первый угол во второй, т. е. точку A в точку A', луч $\overline{AB}$ в луч $\overline{A'B'}$ и луч $\overline{AC}$ в луч $\overline{A'C'}$. Остается доказать, что это движение переводит точку B луча $\overline{AB}$ именно в точку B' луча $\overline{A'B'}$, а точку C луча $\overline{AC}$ — именно в точку C' луча $\overline{A'C'}$. Для этого рассуждаем следующим образом. По условию $AB = A'B'$, т. е. существует некоторое движение D', которое переводит точку A в точку A', а точку B — в точку B'. Ясно, что это движение D переводит луч $\overline{AB}$ в луч $\overline{A'B'}$. Так как оба движения D и D' переводят луч $\overline{AB}$ в луч $\overline{A'B'}$ и нам уже известно, что движение D' переводит точку B в точку B', то в силу аксиомы IV движение D также переводит B в B'. Так же доказывается, что движение D переводит точку C в точку C'. Если воспользоваться полным перечнем аксиом движения и порядка, то подобным же образом можно доказать следующий **признак равенства плоских многоугольников**: *Если стороны одного многоугольника соответственно равны сторонам другого многоугольника и равны углы этих многоугольников, образуемые соответственными сторонами, то многоугольники равны.*

§ 43. ПЕРЕНОСЫ И ПОВОРОТЫ

1. Как уже отмечено в § 42, движение определяется соответствием реперов $R\{a, \overline{OA}, \alpha\}$ и $R'\{a', \overline{O'A'}, \alpha'\}$. В зависимости от взаимного расположения этих «определяющих» реперов возникает тот или иной вид движения.

Параллельный перенос (или просто **перенос**) есть движение, которое возникает в том случае, когда прямые a и a' параллельны, лучи $\overline{OA}$ и $\overline{O'A'}$ одинаково направлены (т. е. лежат в одной

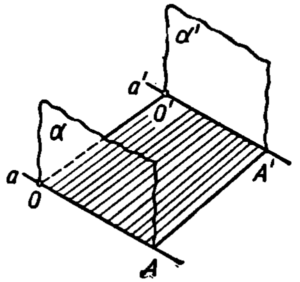


Рис. 268.

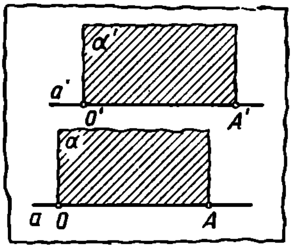


Рис. 269.

полуплоскости относительно прямой CO'), а полуплоскости α и α' лежат либо в параллельных плоскостях, либо в одной плоскости, причем в первом случае лежат по одну сторону от плоскости, определяемой параллельными прямыми a и a' (рис. 268), а во втором случае (рис. 269) лежат по одну сторону от прямой a или прямой a'.

Отметим теперь некоторые простейшие свойства переноса, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1) *Параллельные прямые преобразуются в параллельные же.*

Действительно, если прямым p и q соответствуют прямые p' и q', то при условии параллельности прямых p и q прямые p' и q' не могут пересечься потому, что их общая точка не имела бы прообраза. Кроме того, прямые p' и q' должны лежать в одной плоскости, так как прямые p и q лежат в одной плоскости, а плоскость преобразуется в плоскость.

2) *Каждая прямая g плоскости α, параллельная «оси» a репера R, преобразуется в параллельную ей прямую g'.*

Действительно, так как $g \parallel a$, то $g' \parallel a'$, а так как $a \parallel a'$, то $g \parallel g'$.

3) *Каждый вектор $\overrightarrow{PQ}$, параллельный прямой a, имеет то же направление, что и соответствующий ему вектор $\overrightarrow{P'Q'}$.* В самом деле, пусть P_0 и Q_0 (рис. 270) — проекции точек P и Q на прямую a и соответственно P_0' и Q_0' — проекции точек P' и Q' на

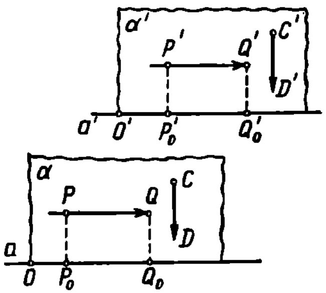


Рис. 270.

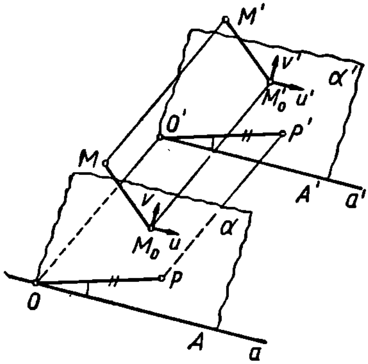


Рис.271.

прямую a'. Тогда точки P_0 и Q_0 преобразуются соответственно в точки P_0' и Q_0', потому что (в силу сохранения перпендикулярности) проектирующие прямые преобразуются в проектирующие прямые.

Точки O, P_0, Q_0 и соответственно O', P_0' и Q_0' расположены в одном и том же порядке (см. аксиому V, § 42). Это и означает, что векторы $\overrightarrow{P_0Q_0}$ и $\overrightarrow{P_0'Q_0'}$, а значит, и векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{P'Q'}$ одинаково направлены.

4) *Если некоторый вектор $\overrightarrow{CD}$ плоскости α перпендикулярен к прямой a, то соответствующий ему вектор $\overrightarrow{C'D'}$ с ним одинаково направлен.*

Действительно, $\overrightarrow{CD} \perp a$, и поэтому $\overrightarrow{C'D'} \perp a'$. Но $a \parallel a'$, и поэтому $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ коллинеарны. С другой стороны, в силу однозначности параллельного переноса луч $\overline{CD}$ пересекает прямую a в том и только в том случае, когда луч $\overline{C'D'}$ пересекает прямую a'.

Перенос обладает следующим свойством, которое иногда принимают за определение этого преобразования:

5) *Все векторы, соединяющие точки и их образы, равны между собой.*

Докажем это. Пусть перенос определяется соответствием реперов $R\{a, \overline{OA}, \alpha\}$ и $R'\{a', \overline{O'A'}, \alpha'\}$ (рис. 271). Рассмотрим сначала точку P, лежащую в полуплоскости α. Пусть плоскость POO' пересекает полуплоскость α' по некоторому лучу. Построим на этом луче такую точку P', чтобы отрезок $O'P'$ был равен отрезку OP.

$\angle A'O'P' = \angle AOP$, так как стороны этих углов соответственно параллельны и одинаково направлены. Ясно, что точка P' есть образ точки P в данном переносе. Так как отрезки OP и $O'P'$ равны и одинаково направлены, то $OPP'O'$ — параллелограмм. А отсюда следует, в частности, что $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OO'}$. Совершенно так же можно показать, что для любой точки Q, лежащей в полуплоскости, дополнительной к полуплоскости α и ее образа Q' имеет место равенство $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{OO'}$.

Если полуплоскости α и α' окажутся расположенными в одной плоскости, то рассуждение только упростится.

Пусть теперь M — произвольная точка пространства, M' — ее образ. Пусть M_0 — проекция точки M на плоскость α, M_0' — проекция точки M' на плоскость α'. Тогда M_0' — образ точки M_0, так как прямая MM_0, перпендикулярная плоскости α, должна преобразоваться в прямую, перпендикулярную плоскости α'; $M'M_0' \parallel MM_0$, так как эти прямые соответственно перпендикулярны к параллельным плоскостям. $M'M_0' = MM_0$ по свойству движений преобразовать фигуру в равную фигуру. Наконец, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0'M'}$ одинаково направлены. Чтобы убедиться в этом, можно построить в точке M_0 векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, соответственно параллельный и перпендикулярный к прямой OA, а в точке M' — соответственные им векторы $\vec{u}'$ и $\vec{v}'$, а затем учесть, что перенос, как и всякое движение, сохраняет ориентацию тройки векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\overrightarrow{M_0M}$. Итак, $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0'M'}$. Отсюда вытекает, что $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_0M_0'}$, а этот последний вектор по доказанному выше равен вектору $\overrightarrow{OO'}$. Итак, для каждой точки M и ее образа M' вектор $\overrightarrow{MM'}$ равен одному и тому же вектору $\overrightarrow{OO'}$, который называется **вектором переноса**.

Помимо задания определяющих реперов, перенос можно определять также заданием вектора переноса. Перенос на вектор $\vec{v}$ будем обозначать символом $\Pi_{\vec{v}}$.

Параллельный перенос очень распространен в опытной деятельности человека. Параллельно переносится поезд, движущийся по прямолинейному пути. Параллельные переносы используются в орнаментах и бордюрах. Для проведения параллельных прямых пользуются переносом угольника или рейсмуса. Переносу подвергаются многие части механизмов и машин.

Произведение двух переносов, определяемых векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, есть также перенос на вектор $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$. Преобразование, обратное переносу на вектор $\vec{v}$, есть также перенос на противоположный вектор $-\vec{v}$. Тождественное преобразование можно рассматривать как перенос на нулевой вектор. Следовательно, *все возможные переносы образуют группу.* Из этой группы можно выделить подгруппу переносов, векторы которых коллинеарны некоторой прямой, подгруппу переносов, векторы которых компланарны некоторой плоскости, и некоторые другие подгруппы.

2. Поворот около оси есть движение, которое возникает в том случае, когда лучи $\overline{OA}$ и $\overline{O'A'}$ определяющих реперов совпадают, а полуплоскости α и α' образуют некоторый ориентированный двугранный угол φ (рис. 272).

Прямая ω, на которой лежат лучи $\overline{OA}$ и $\overline{O'A'}$, называется осью поворота, а угол φ — углом поворота.

Вращение около оси ω на угол φ будем обозначать символом $B_{\omega,\varphi}$.

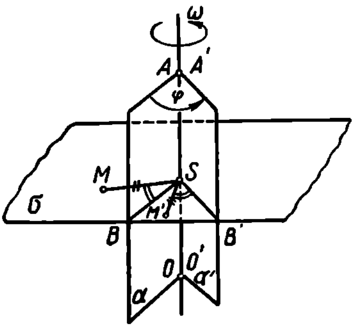


Рис. 272.

Нетрудно припомнить ряд примеров вращения около оси из окружающей нас действительности: вращение Земли около ее оси, вращение махового колеса (в этих примерах угол вращения переменный), поворот открываемой двери или оконной рамы и т. п.

Пусть M (рис. 272) — некоторая точка пространства. Проведем через нее плоскость σ, перпендикулярную оси вращения ω. Пусть эта плоскость пересекает полуплоскость α по лучу $\overline{SB}$, а полуплоскость α' — по лучу $S'B'$. Луч $\overline{SB}$ полуплоскости α преобразуется в луч $\overline{S'B'}$ полуплоскости α', так как точка S преобразуется в себя, а прямой угол, образуемый лучом $\overline{SB}$ с осью ω, должен быть равен углу, образуемому с нею соответственным лучом. Если M' — точка, соответствующая M, то угол $B'S'M'$ должен быть равен углу BSM и одинаково с ним ориентирован (относительно оси ω). Отсюда легко заключить, что

$$\angle MSM' = \angle BSB' = \angle \varphi.$$

Поэтому говорят, что каждая точка M совершает поворот на угол, равный углу данного поворота.

Из предыдущего рассуждения ясно, что точки каждой плоскости σ, перпендикулярной оси вращения, преобразуются в точки этой же плоскости, т. е. при повороте пространства около оси ω

в каждой перпендикулярной к ней плоскости возникает точечное соответствие. Это соответствие называют вращением плоскости вокруг точки, называемой **центром вращения**. Если M — произвольная точка этой плоскости (рис. 273) и M' — ее образ, то $SM = SM'$ и угол MSM' равен постоянному ориентированному углу φ.

В случае, когда $\varphi = 180°$, вращение около точки называют также **отражением** в этой точке или **симметрией** относительно этой точки, которая называется при этом **центром симметрии**.

Поворот около оси ω на угол, равный $180°$, называют также **отражением в этой оси** или симметрией относительно этой оси. Характерная особенность симметрии относительно прямой состоит

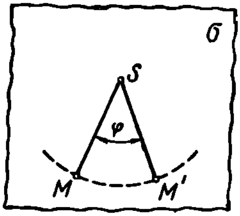


Рис. 273.

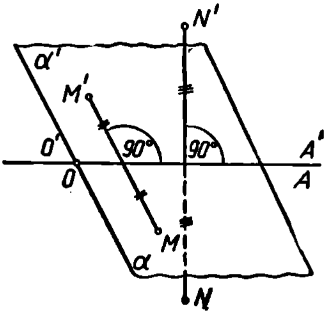


Рис. 274.

в том, что каждый отрезок, соединяющий две соответственные точки, перпендикулярен оси симметрии и делится ею пополам.

Преобразование симметрии относительно оси можно определить и независимо от преобразования поворота, а исходя из общего приема — задания определяющих реперов. Чтобы получить отражение в оси, определяющие реперы надо расположить так, чтобы оси OA и $O'A'$ их совпадали, а полуплоскости α и α' были бы взаимно дополнительными полуплоскостями одной плоскости (рис. 274).

Если в пространстве задана симметрия относительно некоторой оси, то в каждой плоскости, проходящей через эту ось, также определится преобразование, тоже называемое **отражением от прямой** или симметрией относительно этой прямой.

Если (плоская или неплоская) фигура преобразуется в себя при отражении от некоторой прямой, то прямая эта называется **осью симметрии** этой фигуры, а сама фигура — **симметричной** относительно этой прямой. Так, например, квадрат симметричен относительно каждой своей диагонали, окружность — относительно каждого своего диаметра. Окружность (или круг) симметрична относительно прямой, проходящей через ее центр и перпендикулярной к ее плоскости. Круговой цилиндр симметричен относительно его оси.

Осью симметрии часто обладают изображения фасадов зданий. С большей или меньшей степенью приближения можно провести ось симметрии «древесного листа» или изображения насекомого (рис. 275).

Ясно, что правильная m-угольная пирамида преобразуется в себя при повороте около прямой, проведенной через ее вершину перпендикулярно плоскости основания, на угол $\varphi=\frac{2\pi}{m}$, а также на угол $k\varphi$ при любом натуральном k. Такая прямая называется **осью вращения** m-го порядка данной пирамиды.

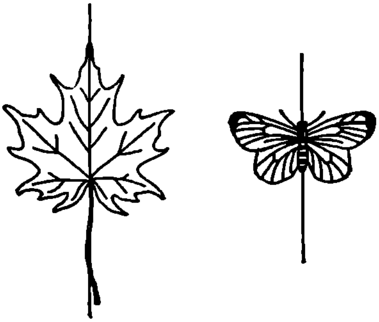


Рис. 275.

Вообще, если какая-либо фигура обладает свойством самосовмещаться при повороте около некоторой прямой на некоторый угол $\varphi=\frac{360^\circ}{m}$ (где m — натуральное число, $m\geqslant2$) и не преобразуется в себя при повороте на какой-либо меньший угол, около этой прямой, то такая прямая называется **осью вращения порядка** m (для данной фигуры). Например, правильная шестиугольная пирамида обладает осью вращения 6-го порядка: она преобразуется в себя при повороте на 60° около ее высоты.

Если для фигуры существует ось вращения порядка m, то говорят, что эта фигура обладает **симметрией вращения** (порядка m).

§ 44. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПЛОСКОСТИ

Отражение от плоскости, или **симметрию** относительно плоскости, можно наглядно представлять себе как преобразование, определяемое в соответствии с законом отражения предметов в плоском зеркале. Дадим определение этого преобразования.

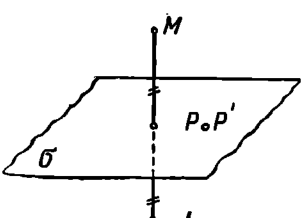


Рис. 276.

Пусть (рис. 276) дана некоторая плоскость σ. Тогда **отражением** от этой плоскости, или симметрией относительно этой плоскости, называется преобразование, при котором каждой точке M пространства ставится в соответствие такая точка M', что: 1) прямая MM' перпендикулярна плоскости σ; 2) плоскость σ пересекает отрезок MM' в его середине. Каждая точка P плоскости σ преобразуется в себя. Отражение от плоскости σ будем обозначать символом O_σ.

Если при отражении в некоторой плоскости фигура преобразуется в себя, то данная плоскость называется *плоскостью симметрии* этой фигуры. Так, например, каждая диаметральная плоскость шара есть плоскость симметрии этого шара. Тела живых существ обладают обычно плоскостью симметрии. Плоскостью симметрии часто обладают также здания (рис. 277).

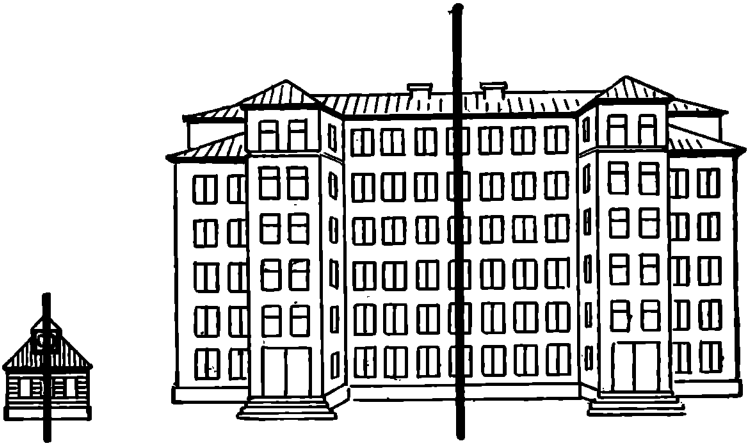


Рис. 277.

Необходимо отметить, что отражение от плоскости не следует считать движением: правая тройка некомпланарных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ преобразуется при отражении в левую тройку $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, $\vec{z}'$ (рис. 278). При отражении в плоскости «левый сапог» преобразуется в правый. Ясно, что эти фигуры не равны.

Следующие два почти очевидных предложения указывают иа наличие тесной связи отражения от плоскости с движением.

(1). *Произведение двух отражений от пересекающихся плоскостей можно рассматривать как поворот около линии пересечения плоскостей* на угол, равный удвоенному линейному углу, образуемому данными плоскостями двугранного угла. Действительно, пусть (рис. 279) $O_{\sigma_1}(M)=M'$, $O_{\sigma_2}(M')=M''$; P — середина MM'; Q — середина $M'M''$.

Точки M, P, M', Q, M'' лежат в одной плоскости α, перпендикулярной линии P пересечения плоскостей σ_1 и σ_2.

$$\angle MOP=\angle M'OP, \quad \angle M'OQ=\angle M''OQ,$$

откуда следует, что

$$\angle MOM''=2\angle POQ.$$

С другой стороны,

$$MO = M'O = M''O.$$

Это и означает, что точку M можно преобразовать в точку M'' поворотом около прямой P на угол 2φ, где φ — линейный угол между плоскостями двугранного угла σ_1 и σ_2.

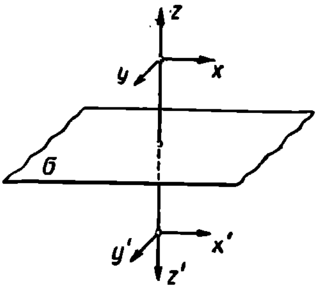


Рис. 278.

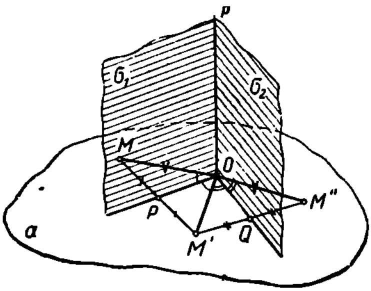


Рис. 279.

Полезно заметить, что справедливо и обратное: поворот около оси можно рассматривать как произведение отражений в двух плоскостях, проходящих через ось и образующих двугранный угол, линейный угол которого вдвое менее угла поворота (в остальном эти плоскости могут выбираться произвольно).

(2). *Произведение двух отражений от параллельных плоскостей можно рассматривать как перенос* на вектор, носитель которого перпендикулярен этим плоскостям, а длина вдвое больше расстояния между плоскостями. Справедливость этого предложения ясна из рисунка 280, где

$$\overrightarrow{MM''} \perp \sigma_1, \sigma_2; \ |\overrightarrow{MM''}| = 2PQ.$$

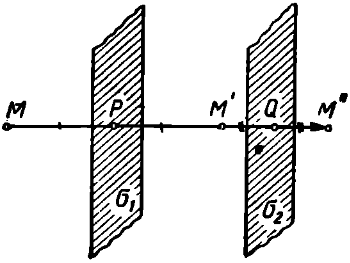


Рис. 280.

Справедливо и обратное: *перенос на вектор* $\overrightarrow{MM''}$ *можно осуществить как последовательность отражений в двух плоскостях*, которые перпендикулярны носителю этого вектора и расстояние между которыми равно половине модуля вектора (а в остальном эти плоскости можно выбирать произвольно).

Произведение поворота около оси ω на отражение в плоскости σ, перпендикулярной к прямой ω, называется *зеркальным поворотом* или *поворотным отражением*. Прямая ω и плоскость α называются при этом соответственно *осью* и *плоскостью* зеркального поворота, а их точка пересечения — центром зеркального поворота. Чтобы определить зеркальный поворот, надо задать его ось, плоскость и угол поворота.

Если некоторая фигура преобразуется в себя при зеркальном повороте около оси ω на угол $\varphi=\frac{2\pi}{n}$ и не существует зеркального поворота с той же осью на меньший угол, также преобразующего эту фигуру в себя, то прямая ω называется осью зеркального поворота порядка n (данной фигуры). Например, прямая, соединяющая центры противоположных граней куба, может рассматриваться как его ось зеркального поворота четвертого порядка; также прямая, соединяющая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, есть его ось зеркального поворота четвертого порядка.

§ 45. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ТОЧКИ

Точка M' называется симметричной точке M относительно точки O (или отражением точки M от точки O), если точка O есть середина отрезка MM'.

Преобразование, при котором каждой точке M некоторой фигуры Ф сопоставляется точка M', симметричная точке M относительно некоторой данной точки O, называется отражением фигуры Ф от точки O.

Если какая-либо фигура при отражении в некоторой точке преобразуется в себя, то эта точка называется центром симметрии данной фигуры. Например, центр симметрии куба есть точка пересечения его диагоналей. Центр симметрии правильного шестиугольника — точка пересечения его осей симметрии.

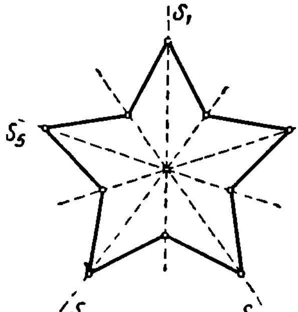


Рис. 281.

Не надо думать, что в пересечении осей симметрии всегда образуется центр симметрии. Несправедливость такого предположения ясно видна на примере правильного звездчатого пятиугольника (рис. 281): он обладает пятью осями симметрии, но центра симметрии не имеет.

Ограниченная фигура (т. е. такая, которая целиком располагается внутри некоторого достаточно большого шара) не может иметь более одного центра симметрии. Действительно, пусть (рис. 282) S_1 и S_2 — два центра симметрии какой-либо фигуры, A — ее произвольная точка. Тогда данной фигуре принадлежат: точка A_1, симметричная с точкой A относительно S_1, и точка A_2, симметричная точке A_1 относительно S_2, и точка A_3, симметричная точке A_2 относительно S_1, и т. д. до бесконечности. Но, как легко заметить, $AA_2=A_2A_4=\ldots$ откуда ясно, что фигура, содержащая точки A, A_2, A_4, ... неограниченная.

Таким образом, *фигура, имеющая более одного центра симметрии,* заведомо *не ограничена.* Обратное, однако, неверно. Неограниченная фигура может иметь единственный центр симметрии или вовсе его не иметь. Так, например, гипербола имеет единственный центр симметрии, а парабола вовсе не имеет центра симметрии.

Нетрудно убедиться далее, что *при наличии двух центров симметрии фигура должна иметь уже бесконечно много центров симметрии.* Действительно, пусть S_1 и S_2 — два центра симметрии некоторой фигуры (рис. 283). Докажем, что точка S_3, симметрич-

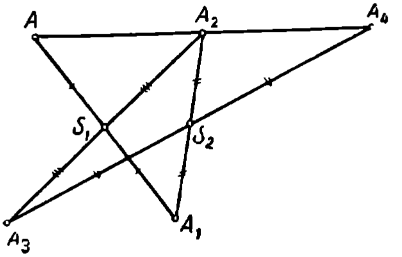


Рис. 282.

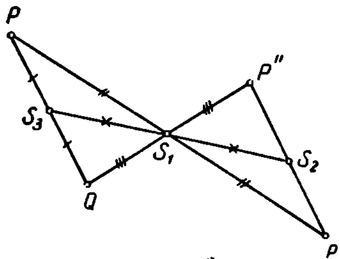


Рис. 283.

ная точке S_2 относительно точки S_1, также есть центр симметрии фигуры Ф. Для этого надо доказать, что если точка P принадлежит фигуре Ф, то и точка, симметричная ей относительно S_3, также принадлежит Ф. Точка P', симметричная P относительно S_1, принадлежит Ф. Точка P'', симметричная P' относительно S_2, также принадлежит фигуре Ф. Наконец, точка Q, симметричная P'' относительно S_1, принадлежит Ф. Но при повороте отрезка $P'P''$ около точки S_1 на 180° точки P', P'' и S_2 совместятся соответственно с точками P, Q и S_3, откуда и следует, что S_3 — середина отрезка PQ, так что точки P и Q симметричны относительно S_3; S_3 действительно есть центр симметрии фигуры Ф.

Фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии, действительно существуют. Таковы, например, прямая, плоскость, круглая цилиндрическая поверхность (образуемая вращением прямой около параллельной ей прямой) и др.

Если фигура имеет ось симметрии s и единственный центр симметрии S, то этот центр симметрии непременно принадлежит оси. Действительно, нетрудно заметить, что в противном случае данная фигура имела бы по крайней мере еще один центр симметрии — точку S', симметричную S относительно прямой s.

Отражение плоской фигуры от точки O, лежащей в ее плоскости, есть движение, которое можно определить соответствием реперов $\{O, \overline{OA}, \alpha\}$ и $\{O', \overline{O'A'}, \alpha'\}$, лежащих в данной плоскости и расположенных, как указано на рисунке 284.

Но отражение неплоской фигуры в точке или отражение плоской фигуры в точке, не лежащей в плоскости этой фигуры, уже не есть движение: при таком преобразовании меняется ориентация, «часовая стрелка меняет направление своего движения» (см. рис. 285).

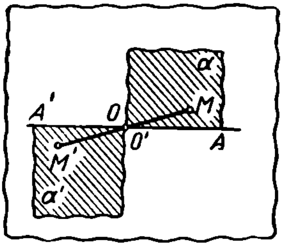


Рис. 284.

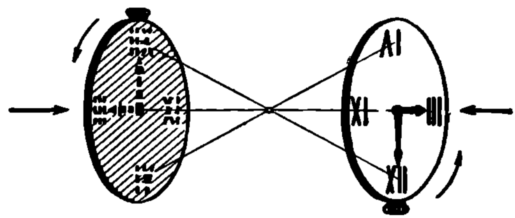


Рис. 285.

§ 46. ОБ ЭЛЕМЕНТАХ СИММЕТРИИ МНОГОГРАННИКОВ

Плоскости симметрии, оси и центр симметрии, а также оси вращения различных порядков называются **элементами симметрии** геометрической фигуры.

Вопрос об элементах симметрии многогранников имеет, помимо теоретического, также и прикладной интерес, например, для кристаллографии.

Познакомимся с элементами симметрии правильных многогранников.

Элементы симметрии правильного тетраэдра легко представить себе непосредственно. Это (рис. 286):

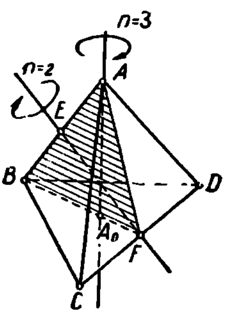


Рис. 286.

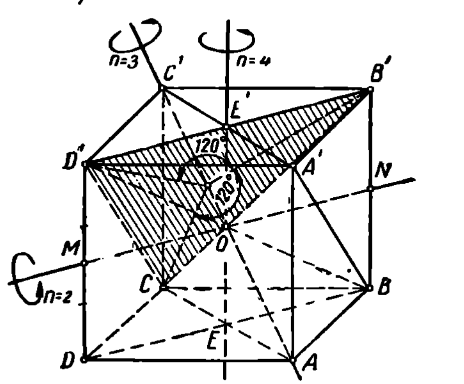


Рис. 287.

1) четыре оси вращения третьего порядка — высоты тетраэдра (AA_0 и др.);

2) три оси симметрии (EF и др.), соединяющие середины противоположных ребер;

3) 6 плоскостей симметрии (ABF и др.), каждая из которых проходит через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра.

Для дальнейшего надо прежде всего заметить, что при каждом самосовмещении правильного многогранника в себя центры его граней преобразуются друг в друга. А так как центры граней многогранника служат вершинами взаимного ему многогранника, то *взаимные многогранники имеют всегда одни и те же элементы симметрии*. Следовательно, одни и те же элементы симметрии имеют куб и октаэдр, икосаэдр и додекаэдр.

Не составляет большого труда перечислить элементы симметрии куба.

Куб (рис. 287) имеет:

1) центр симметрии (точка O пересечения его диагоналей);

2) 9 плоскостей симметрии: 6 диагональных плоскостей и 3 плоскости — «средние» к плоскостям противоположных граней;

3) 6 осей вращения второго порядка, соединяющих середины противоположных ребер (например, MN);

4) 3 оси вращения четвертого порядка, соединяющие центры противоположных граней (например, EE');

5) 4 оси вращения третьего порядка, соединяющие противоположные вершины. На рисунке 287 AC' — одна из таких осей: при повороте около прямой AC' на 120° вершина B' совмещается с D', D' — с C, C — с B', а также D — с B, B — с A', A' — с D; вершины A и C' самосовмещаются.

Предоставляем читателю сформулировать, как расположены эти оси и плоскости относительно вершин, ребер и граней правильного октаэдра, рассматривая правильный октаэдр как многогранник, взаимный кубу.

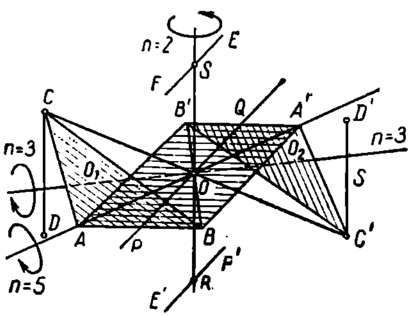


Рис. 288.

Элементы симметрии правильного икосаэдра удобнее всего усмотреть, пользуясь его каркасом. Ясно, что точка O (рис. 288) — центр симметрии икосаэдра.

Через каждые два параллельных ребра икосаэдра проходит плоскость симметрии. Это ясно для ребер: AB и $A'B'$, CD и $C'D'$, EF и $E'F'$. А в силу равноправия всех одноименных элементов многогранника это обстоятельство будет иметь место и для каждой пары параллельных ребер. Следовательно, правильный икосаэдр имеет 15 плоскостей симметрии.

Ясно также, что 15 прямых (PQ, RS и др.), соединяющих середины противоположных ребер икосаэдра, суть 15 его осей симметрии (осей вращения второго порядка).

Так как из каждой вершины икосаэдра исходит 5 ребер, то через каждую пару противоположных вершин (A и A', B и B' и т. д.) проходят 5 плоскостей симметрии. Эти плоскости образуют двугранные углы по 36°. Произведение отражений в двух соседних плоскостях есть поворот на 72° (см. § 43). Следовательно, прямая, соединяющая две противоположные вершины икосаэдра, есть ось вращения пятого порядка. Таким образом, икосаэдр имеет 6 осей вращения пятого порядка.

Каждая грань ABC (рис. 288) правильного икосаэдра образует с его центром симметрии O правильную треугольную пирамиду $OABC$. Симметрично с ней относительно центра O располагается правильная треугольная пирамида $OA'B'C'$. Эти пирамиды преобразуются в себя при повороте около их общей высоты O_1O_2 на угол в 120°. Из равенства всех плоских и всех двугранных углов многогранника легко заключить, что это повлечет за собой совмещение друг с другом граней, смежных с гранями ABC или $A'B'C'$, и на том же основании и всех остальных, т. е. каждая прямая, соединяющая центры противоположных граней икосаэдра, есть ось вращения третьего порядка.

Итак, правильный икосаэдр обладает следующими элементами симметрии: 1) центр симметрии; 2) 15 плоскостей симметрии; 3) 15 осей симметрии; 4) 6 осей вращения пятого порядка; 5) 10 осей вращения третьего порядка.

В силу взаимности такие же элементы симметрии имеет и правильный додекаэдр.

Следующие соображения позволяют проверить, действительно ли найдены в с е оси вращения какого-либо правильного многогранника.

Условимся называть д в и ж е н и е м с а м о с о в м е щ е н и я такое движение многогранника, при котором этот многогранник переходит в себя. Нетрудно убедиться, что *число всех движений самосовмещения правильного многогранника вдвое больше числа его ребер.*

Мы рассмотрим с этой целью произвольный плоский угол многогранника — угол α. Всякое движение самосовмещения данного многогранника преобразует этот плоский угол в какой-то (тот же или другой) плоский угол α' этого многогранника. И наоборот, при любом выборе плоского угла α' существует единственное движение, преобразующее α в α' и данный многогранник в себя. Так как в качестве α' можно взять любой из плоских углов данного правильного многогранника, то всех движений самосовмещения правильного многогранника существует столько же, сколько он имеет плоских углов. А их вдвое больше, чем ребер. Отсюда и следует доказываемое предложение.

Для примера обратимся к правильному тетраэдру. У него шесть ребер. Поэтому для него число всех движений самосовмещения равно 12. Ранее мы обнаружили три оси второго порядка правильного тетраэдра. Каждая ось второго порядка позволяет осуществить одно движение самосовмещения, отличное от тождественного, а именно поворот около этой оси на 180°. Таким образом, получим три движения самосовмещения, отличных от тождественного. Аналогично каждая из четырех осей вращения третьего порядка дает два таких движения самосовмещения, а всего $4 \cdot 2 = 8$. Если присоединить еще тождественное движение самосовмещения, то получим всего $3+8+1=12$ самосовмещений, т. е. действительное число всех возможных совмещений. Следовательно, мы указали все оси вращения правильного тетраэдра.

Приведем еще одно полезное обобщение указанного предложения о числе движений самосовмещения правильного многогранника. Условимся причислять к элементам симметрии еще и зеркально-поворотные оси. Назовем преобразованием самосовмещения многогранника такое преобразование, при котором все его вершины, ребра и грани переходят соответственно опять в его вершины, ребра и грани, причем сохраняются все отношения принадлежности этих элементов. Тогда можно показать, что *число всех преобразований самосовмещения правильного многогранника в четыре раза больше числа его ребер* (см., например, [34], § 170).

Чтобы убедиться, что найдены все элементы симметрии правильного многогранника, надо показать только, что полученные элементы симметрии позволяют осуществить все $4r$ самосовмещений этого многогранника, где r — число ребер. Произведем такую проверку на примере куба.

Всех возможных самосовмещений $4r=48$.

Оси и плоскости симметрии дают каждая по одному преобразованию, т. е. всего 15 способов самосовмещения куба.

Каждая ось вращения четвертого порядка позволяет осуществить три вращения, отличных от тождественного, а также два «зеркально-поворотных» преобразования (при углах в 90° и 270°), отличных от симметрии в плоскостях. Таким образом, каждая ось третьего порядка порождает 5 самосовмещений куба, а все эти оси — 15.

Каждая ось вращения третьего порядка дает два отличных от тождества вращения (при повороте на 120° и на 240°), а также два зеркально-поворотных движения, отличных от отражения в точке, так что всего оси порождают 16 преобразований симметрии.

Присоединяя еще симметрию относительно центра и тождественное преобразование, получим все 48 возможных самосовмещений куба.

Общая теория симметрии представляет большую и содержательную проблему, составляющую основу теоретической кристаллографии. Эта проблема была исследована знаменитым русским кристаллографом и геометром Е. С. Федоровым (1853—1919).

§ 47. ПРОИЗВОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ

При движении плоской фигуры в ее плоскости должна сохраняться ориентация каждого треугольника (по часовой или против часовой стрелки). Поэтому любое движение в плоскости можно определить соответствием всего двух пар точек: $A \to A'$, $B \to B'$ (причем $A'B' = AB$). После этого произвольно выбранная точка C, не лежащая на прямой AB, будет преобразовываться в одну вполне

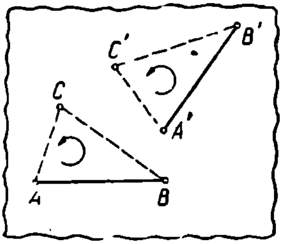


Рис. 289.

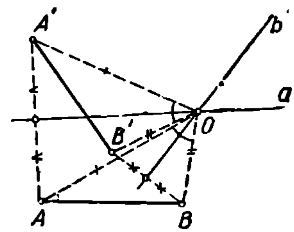


Рис. 290.

определенную точку C', так как треугольники ABC и $A'B'C'$ должны быть не только равны, но и одинаково ориентированы (рис. 289).

Допустим, что при $A'B' = AB$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ не равны, и докажем, что при этом условии существует вращение, преобразующее точку A в точку A' и одновременно точку B в точку B', т. е. что в этом случае данное движение можно рассматривать как вращение плоскости около точки.

Будем предполагать сначала, что A не совпадает с A' и прямые AB и $A'B'$ пересекаются.

Будем искать центр вращения как точку, равноудаленную от A и A' и в то же время равноудаленную от B и B'. Такая точка должна быть общей для симметрали a точек A и A' и симметрали b точек B и B'. Могут представиться два случая.

1) Прямые AA' и BB' непараллельные (рис. 290). Тогда прямые a и b тоже пересекаются. Пусть $a \times b \equiv 0$. Тогда $OA = OA'$, $OB \equiv OB'$.

Нетрудно убедиться, что $\angle AOA' = \angle BOB'$. В самом деле, треугольники OAB и $OA'B'$ равны по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle AOB = \angle A'OB'$, а так как $\angle AOA' = \angle AOB + \angle A'OB$ и $\angle BOB' = \angle A'OB' + \angle A'OB$, то $\angle AOA' = \angle BOB'$. После этого ясно, что при повороте около точки O на угол $\angle OA'$ отрезок AB займет положение $A'B'$.

2) $AA' \parallel BB'$ (рис. 291 и 292). Пусть $AB \times A'B' = 0$. Ясно, что $\angle OAA' = \angle OBB'$, $\angle OA'A = \angle OB'B$.

Поэтому

$$\frac{AO}{A'O}=\frac{BO}{B'O}=\frac{AO \pm BO}{A'O \pm B'O}=1.$$

Таким образом, $AO=A'O$, $BO=B'O$, так что треугольники AOA' и BOB' равнобедренные. Но тогда прямые a и b проходят через O, и так как $a \perp AA'$, $b \perp BB'$ и $AA' \parallel BB'$, то a совпадает с b. Очевидно также, что $\angle AOA'=\angle BOB'$. Поэтому при повороте вокруг точки O на угол AOA' точка A перейдет в точку A', а точка B — в точку B', что и требовалось доказать.

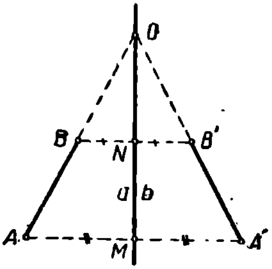


Рис. 291.

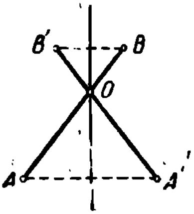


Рис. 292.

Обратимся теперь к нерассмотренным нами случаям. Если A совпадает с A', то при повороте вокруг A на угол BAB' отрезок AB преобразуется в отрезок $A'B'$. Аналогично будет, если B совпадает с B'.

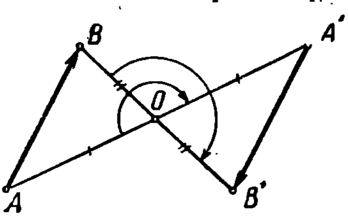


Рис. 293.

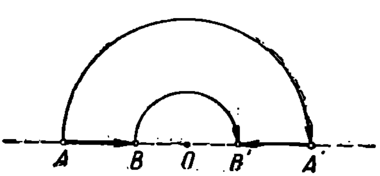


Рис. 294.

Если $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}$ (рис. 293 и 294), то доказательство лишь упрощается: при повороте на 180° около середины O отрезка AA' $A,B \rightarrow A',B'$.

Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, то вращения, преобразующего одновременно A в A' и B в B', нет. В этом случае существует параллельный перенос, осуществляющий такое преобразование.

Итак, *любое движение в плоскости можно осуществить посредством вращения или параллельного переноса.*

Последнее предложение часто называют теоремой Бернулли — Шаля.

§ 48. ПРОИЗВОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Как уже отмечалось (см. § 2), произвольное движение в пространстве однозначно определяется соответствием трех пар неколлинеарных точек:

$$A \to A', \ B \to B', \ C \to C', \text{ где } AB = A'B', \ AC = A'C', \ BC = B'C'.$$

Очевидно, движение D можно разложить на два: 1) перенос $\Pi_{\overrightarrow{AA'}}$ на вектор $\overrightarrow{AA'}$, причем $A \to A'$, а точки B и C преобразуются соответственно в некоторые точки B_1 и C_1 (рис. 295) и 2) движение D_0, преобразующее точку A' в себя, а точки B_1 и C_1 соответственно в точки B' и C'.

Таким образом, $D = D_0 \cdot \Pi_{\overrightarrow{AA'}}$.

Исследуем второе из этих преобразований. (D_0) — произвольное движение, при котором одна точка (A') преобразуется в себя.

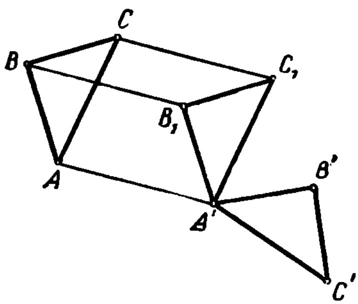


Рис. 295.

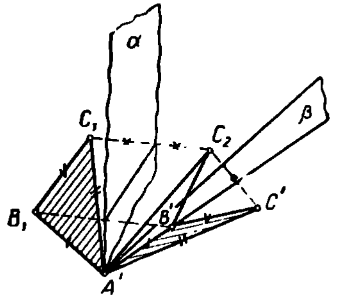


Рис. 296.

Чтобы преобразовать точку B_1 в точку B', не изменяя положения точки A', достаточно осуществить отражение O_α в плоскости α (рис. 296), проходящей через середину отрезка B_1B' и перпендикулярной к прямой B_1B'. Плоскость α пройдет через точку A', так как эта точка равноудалена от точек B_1 и B'. Отражение O_α преобразует точку C_1 в такую точку C_2, что $A'C_2 \equiv A'C_1 \equiv A'C'$. Поэтому плоскость β, перпендикулярная к прямой $C'C_2$ и проходящая через середину отрезка $C'C_2$, пройдет через точку A'. Но эта плоскость β пройдет также и через точку B'. Действительно, отрезки $B'C_2$ и B_1C_1 равны, ибо они симметричны относительно плоскости α; отрезок $B'C'$ равен отрезку B_1C_1 как его образ в рассматриваемом движении D_0, следовательно, $B'C_2 = B'C'$, поэтому точка B' принадлежит геометрическому месту точек, равноудаленных от C_2 и C', т. е. плоскости β. Отражение в β оставляет, следовательно, точки A' и B' без изменения. Итак,

$$O_\alpha (A', B_1, C_1) = A', B', C_2; \ O_\beta (A', B', C_2) = A', B', C';$$

$$O_\beta \times O_\alpha (A', B_1, C_1) = A', B', C',$$

т. е. движение с неизменной точкой A' можно осуществить как произведение отражений в двух плоскостях α и β: $D_0 = O_\beta \times O_\alpha$. Эти плоскости имеют общую точку A', а следовательно, и некоторую общую прямую ω. Но произведение отражений в пересекающихся плоскостях α и β можно представить как поворот около линии их пересечеиия ω (см. § 43): $O_\beta \times O_\alpha = B_\omega$.

Итак, $D = B_\omega \times \Pi_{\overrightarrow{AA'}}$, т. е. *произвольное движение в пространстве можно представить как произведение переноса и вращения около некоторой оси.*

Если вектор переноса AA' окажется коллинеарным оси ω, то произведение $B_\omega \times \Pi_{\overrightarrow{AA'}}$ называется винтовым движением.

Докажем, что *любое движение в пространстве можно рассматривать как винтовое движение.*

Пусть D — произвольное движение в пространстве. Согласно доказанному D можно представить в виде: $D = B_\omega \times \Pi_{\overrightarrow{AA'}}$.

Допустим сначала, что вектор $\overrightarrow{AA'}$ параллельного переноса перпендикулярен оси вращения ω. Проведем через ω плоскость α, перпендикулярную прямой AA' (рис. 297). Пусть φ — угол поворота B_ω. Проведем через ω плоскость β, образующую с плоскостью α двугранный угол, линейный угол которого равен $\frac{1}{2}\varphi$. Тогда $B_{\omega, \varphi}$ есть произведение отражений в плоскостях α и β: $B_{\omega, \varphi} = O_\beta \times O_\alpha$. Построим еще плоскость γ, параллельную α и отстающую от нее на расстояние $\frac{1}{2} AA'$. Тогда $\Pi_{\overrightarrow{AA'}} = O_\alpha \times O_\gamma$, а данное движение $D = O_\beta \times O_\alpha \times O_\alpha \times O_\gamma$. Но $O_\alpha \times O_\alpha = T$,

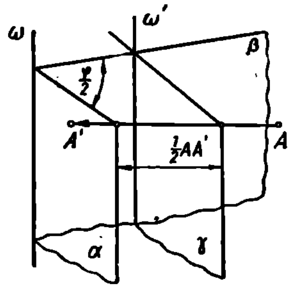


Рис. 297.

так что $D = O_\beta \times O_\gamma = B_{\omega'}$, где ω' — линия пересечения плоскостей β и γ, так что в данном случае движение можно рассматривать как вращение около оси.

Если же вектор $\overrightarrow{AA'}$ не перпендикулярен оси α, то разложим его на два вектора $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$, из которых один $(\overrightarrow{v_1})$ коллинеарен оси ω, а другой $(\overrightarrow{v_2})$ перпендикулярен к ней. Тогда

$$D = B_\omega \times \Pi_{\overrightarrow{AA'}} = B_\omega \times \left(\Pi_{\overrightarrow{v_2}} \times \Pi_{\overrightarrow{v_1}}\right) = \left(B_\omega \times \Pi_{\overrightarrow{v_2}}\right) \times \Pi_{\overrightarrow{v_1}}.$$

Но по предыдущему $B_\omega \times \Pi_{\overrightarrow{v_2}} = B_{\omega'}$, так что $D = B_{\omega'} \times \Pi_{\overrightarrow{v_1}}$. Вектор $\overrightarrow{v_1}$ коллинеарен прямой ω, а следовательно, и прямой ω', так что преобразование D действительно есть винтовое движеиие.

§ 49. ГОМОТЕТИЯ

1. Слово **гомотетия** происходит от греческих слов ὅμοσ (омос) — подобный и θετόσ (тетос) — расположенный. Вместо термина «гомотетия» употребляют в том же смысле термины «перспективное подобие» или **центральное подобие**. Дадим определение гомотетии.

Пусть задана некоторая точка S, которую назовем **центром подобия** (или центром гомотетии), и некоторое, отличное от нуля действительное число k, которое назовем **коэффициентом подобия**. Гомотетией с центром S и коэффициентом k называется преобразование, обладающее следующими свойствами:

1) центру подобия S сопоставляется эта же точка;

2) каждой отличной от S точке P сопоставляется такая точка P', что:

а) точки S, P и P' лежат на одной прямой,

б) длина отрезка SP' в $|k|$ раз больше длины отрезка SP, т. е. $SP'=|k|\cdot SP$,

в) отрезки SP и SP' одинаково направлены, если $k>0$, и противоположно направлены, если $k<0$.

Пользуясь векторными обозначениями, все эти условия, определяющие гомотетию, можно объединить в одно, а именно:

$$\overrightarrow{SP'}=k\cdot\overrightarrow{SP}$$

Гомотетию с центром S и коэффициентом k будем обозначать так:

$$\Gamma\{S,\ k\}.$$

Если в некоторой гомотетии точке P ставится в соответствие точка P', то говорят, что точка P' **гомотетична** точке P. Если некоторая данная гомотетия преобразует какую-либо фигуру Φ в фигуру Φ', то фигуру Φ' называют гомотетичной фигуре Φ (в рассматриваемой гомотетии).

Ясно, что если гомотетия $\Gamma\{S,\ k\}$ преобразует фигуру Φ в фигуру Φ', то гомотетия $\Gamma\{S,\ 1:k\}$ преобразует фигуру Φ' в фигуру Φ.

Если $k=1$, то при любом выборе точки P $\overrightarrow{SP'}=\overrightarrow{SP}$, т. е. точка P' совпадает со своим прообразом P. Иными словами, при этом каждая точка преобразуется в себя: *при $k=1$ гомотетия представляет собой тождественное преобразование.*

Если $k=-1$, то $\overrightarrow{SP'}=-\overrightarrow{SP}$. Это значит, что точка P' симметрична точке P относительно центра гомотетии: *гомотетия при $k=-1$ является симметрией относительно точки S.*

Гомотетия называется **прямой**, если $k>0$, и **обратной**, если $k<0$. В случае прямой гомотетии точка и ее образ располагаются по одну сторону от центра подобия S, в случае обратной гомотетии — по разные стороны.

Две данные фигуры Φ и Φ' называют перспективно-подобными или подобными и подобно расположенными, если существует гомотетия, преобразующая фигуру Φ в фигуру Φ'. В случае, когда точка фигуры Φ и соответственная ей точка фигуры Φ' располагаются по одну сторону от центра подобия (прямая гомотетия), центр подобия называется внешним. Если же соответственные точки перспективно-подобных фигур располагаются по разные стороны от центра подобия (обратная гомотетия), то центр подобия называется внутренним.

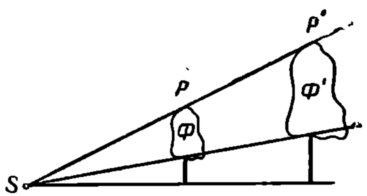


Рис. 298.

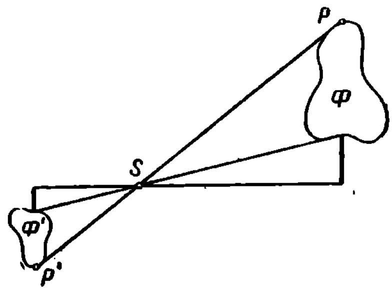


Рис. 299.

На рисунке 298 точка S — внешний центр подобия фигур Φ и Φ'. На рисунке 299 точка S — внутренний центр подобия фигур Φ и Φ'.

Не следует думать, что внешний центр подобия двух фигур всегда располагается вне этих фигур. На рисунке 300 показаио преобразование фигуры Φ в фигуру Φ' в прямой гомотетии, точка S служит внешним центром подобия этих фигур.

Гомотетия есть взаимно одно-

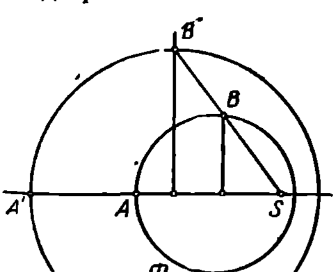


Рис. 300.

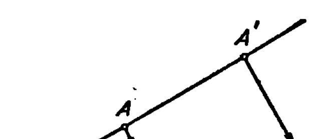


Рис. 301.

значное преобразование. В самом деле, для каждой точки P' существует на прямой SP' единственная такая точка P, что $\overrightarrow{SP}=\frac{1}{k}\overrightarrow{SP'}$, т. е. $\overrightarrow{SP'}=k\cdot\overrightarrow{SP}$. Иными словами, для каждой точки P' существует единственный прообраз.

2. Отметим следующее простое, но очень важное свойство гомотетии: *отрезок, соединяющий две произвольные точки, не лежащие на одной прямой с центром гомотетии, и отрезок, соединяющий образы этих точек, лежат на параллельных прямых* (при $k=1$ сливаются). *Отношение длины второго отрезка к длине первого равно абсолютной величине коэффициента гомотетии* (т. е. $|k|$).

Доказательство. Пусть точкам A и B (рис. 301) сопоставлены соответственно точки A' и B'. Тогда $SA'=|k|\cdot SA$ и $SB'=SB\cdot|k|$, откуда следует, что $SA':SA=SB':SB$, так что прямые AB и $A'B'$ отсекают на сторонах угла ASB пропорциональные отрезки. Отсюда ясно, что, во-первых, $AB \parallel A'B'$ и, во-вторых, $A'B'=|k|\cdot AB$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ направлены одинаково, если гомотетия прямая, и противоположно направлены, если гомотетия обратная. Действительно, прямая AA' делит плоскость ASB на две полуплоскости α_1 и α_2. Луч SB принадлежит одной из этих полуплоскостей, скажем α_1. Если гомотетия прямая (рис. 301), то точка B' принадлежит тому же лучу и, следовательно, той же полуплоскости α_1. Это означает, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ лежат по одну

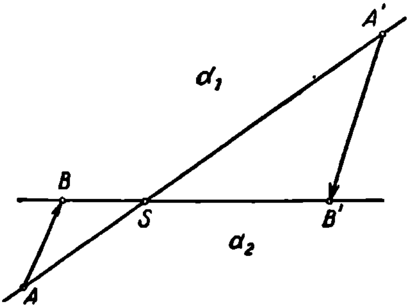


Рис. 302.

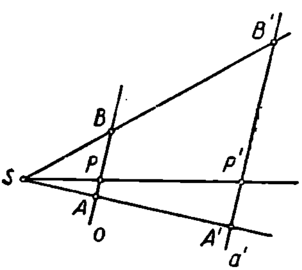


Рис. 303.

сторону от прямой AA', соединяющей их начала, так что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ одинаково направлены.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в случае обратной гомотетии векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ имеют противоположные направления (рис. 302).

Установим, как преобразуются в гомотетии некоторые простейшие фигуры.

1) *Прямая, проходящая через центр гомотетии, преобразуется в себя.* Это непосредственно следует из определения гомотетии.

2) *Прямая, не проходящая через центр гомотетии, преобразуется в параллельную ей прямую* (если $k\neq 1$).

Доказательство. Пусть a (рис. 303) — какая-либо прямая, не проходящая через центр гомотетии S, A и B — какие-либо две точки на прямой a, A' и B' — гомотетичные им точки. Прямую $A'B'$ обозначим через a'.

Если P — любая точка прямой a и P' — ее образ, то по доказанному $A'B' \parallel AB$ и $A'P' \parallel AB$, т. е. прямые $A'B'$ и $A'P'$ проходят через точку A' параллельно одной и той же прямой. Значит, они сливаются, так что точка P' располагается на прямой a'. Итак, всякая точка прямой a преобразуется в некоторую точку прямой a'.

Обратно, пусть P' (тот же рисунок) — какая-либо точка прямой a'. Прямая $P'S$, пересекая прямую a', пересечет и параллельную ей прямую a в некоторой точке P. Легко усмотреть, что именно эта точка P преобразуется в данную точку P'. Действительно, из подобия треугольников $SA'P'$ и SAP видно, что

$$SP' : SP = SA' : SA = |k|,$$

и, кроме того, ясно, что точки P и P' располагаются по одну сторону от S в случае прямой гомотетии и по разные стороны от S в случае обратной гомотетии. Таким образом, каждая точка прямой a' служит образом некоторой точки прямой a.

3) *При гомотетии параллельные прямые преобразуются в параллельные же прямые.*

Действительно, пусть прямая a параллельна прямой b и пусть некоторая гомотетия преобразует эти прямые соответственно в прямые a' и b'. Тогда прямые a' и b' не могут иметь общих точек, так как прообраз общей точки лежал бы как на прямой a, так и на прямой b, а эти прямые по условию общих точек не имеют.

Это предложение можно вывести также из предыдущего предложения.

4) *При гомотетии отрезок преобразуется в отрезок.*

Пусть (рис. 303) AB — какой-либо отрезок, A' и B' — точки, соответственно гомотетичные точкам A и B. Пусть P — произвольная точка отрезка AB, P' — гомотетичная ей точка. По условию $AP+PB=AB$. Следовательно,

$$A'P'+P'B' = |k|\cdot AP + |k|\,BP = |k|(AP+BP) = |k|\cdot AB = A'B',$$

т. е.

$$A'P'+P'B' = A'B',$$

а это возможно лишь тогда, когда точка P' располагается на отрезке $A'B'$ (в противном случае $A'P'+P'B' > A'B'$). Таким образом, каждая точка отрезка AB преобразуется в точку отрезка $A'B'$. Аналогично доказывается и обратное: каждая точка отрезка $A'B'$ гомотетична некоторой точке отрезка AB.

Следующие три предложения легко вытекают из доказанного.

5) *При гомотетии луч преобразуется в луч*, причем луч и его образ направлены одинаково в случае прямой гомотетии и противоположно в случае обратной гомотетии.

6) *При гомотетии угол преобразуется в равный ему угол.*

7) *При гомотетии многоугольник преобразуется в подобный ему многоугольник.*

8) *При гомотетии высота, медиана и биссектриса данного треугольника преобразуются соответственно в высоту, медиану и биссектрису гомотетичного треугольника.*

Из определения гомотетии непосредственно следует:

9) *Плоскость, проходящая через центр гомотетии, преобразуется в себя.*

10) *Плоскость, не проходящая через центр гомотетии, преобразуется в параллельную ей плоскость* (также не проходящую через центр гомотетии[1]).

Доказательство. Пусть (рис. 304) α — некоторая плоскость, S — центр гомотетии. Выберем в плоскости α три произвольные точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и пусть A', B' и C' — их образы в данной гомотетии.

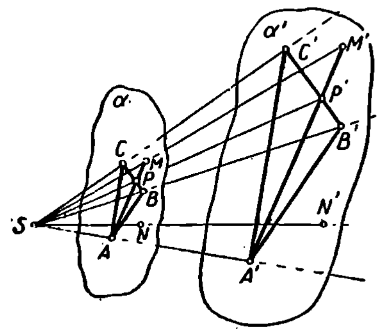


Рис. 304.

Точки A', B' и C' также не лежат на одной прямой (почему?), так что они определяют некоторую плоскость α'. Эта плоскость параллельна плоскости α, так как $A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$ (см. п. 2).

Пусть M — произвольная точка плоскости α, M' — ее образ. Докажем, что $M' \in \alpha'$. Допустим сначала, что прямые BC и AM не параллельны, и пусть P — точка их пересечения. Точка P прямой BC преобразуется в точку P' прямой $B'C'$. Прямая $A'P'$ лежит поэтому в плоскости α'. Точка M прямой AP преобразуется в точку M' прямой $A'P'$. Поэтому точка M' лежит в плоскости α'. Если же прямые BC и AM параллельны, то M' лежит в плоскости α' потому, что принадлежит прямой $A'M'$, проведенной через точку A' этой плоскости параллельно прямой $B'C'$ этой плоскости.

Обратно, для любой точки N' плоскости α' существует ее прообраз в плоскости α. Действительно, прямая SN' пересекает плоскость α в некоторой точке N. Образ этой точки должен принадлежать прямой SN и плоскости α', т. е. совпадает с точкой N'.

Из перечисленных свойств легко заключить, что:

11) *Гомотетия преобразует многогранник в многогранник* с соответственно равными линейными, двугранными и многогранными углами, причем отношение любых двух соответственных ребер этих многогранников равно абсолютной величине коэффициента гомотетии.

[1] Мы исключаем из рассмотрения случай, когда $k=1$, т. е. случай, когда гомотетии есть тождественное преобразование.

12) *При гомотетии* всякая *сфера* (O, r) *преобразуется* в некоторую *сферу* (O', r'), причем центр сферы преобразуется в центр гомотетичной сферы, а отношение радиусов $r':r$ равно абсолютной величине коэффициента гомотетии.

Действительно, если M — произвольная точка сферы (O, r), то она преобразуется в такую точку M', что $O'M':OM=|k|$. Следовательно, $O'M'=|k|\cdot r$. И обратно, если N' — точка сферы $(O', r'=|k|\cdot r)$, то для ее прообраза N расстояние ON от точки O равно $\frac{1}{|k|}\cdot r'=r$, т. е. точка N принадлежит сфере (O, r).

13) *При гомотетии всякая окружность* (O, r) *преобразуется в окружность* (O', r'), причем $O \to O'$ и $r':r=|k|$.

Действительно, плоскость α, в которой лежит данная окружность, преобразуется в некоторую плоскость α'. Точка O' лежит в этой плоскости α'. Образ M' каждой точки M данной окружности лежит в плоскости α', причем $O'M'=|k|\cdot r$, т. е. расстояние точки M' от точки O' постоянно и отличается от r множителем $|k|$.

3. Ввиду важности вопроса о гомотетии окружностей приведем некоторые теоремы.

Теорема. *Всякие две неравные окружности, лежащие в одной плоскости, перспективно-подобны и обладают внешним и внутренним центрами подобия.*

Доказательство. Пусть (рис. 305) даны две окружности $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$, причем $r_2>r_1$. Допустим сначала, что

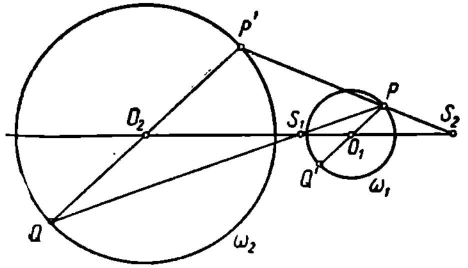


Рис. 305.

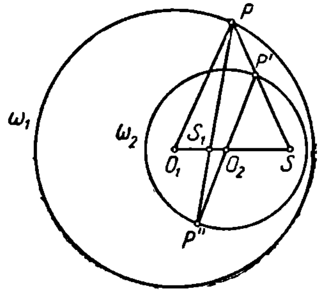


Рис. 306.

центры O_1 и O_2 различны. Разделим отрезок O_1O_2 внешним и внутренним образом в отношении $r_2:r_1$. Получим точки S_2 и S_1, такие, что $S_2O_2:S_2O_1=S_1O_2:S_1O_1=r_2:r_1$. Покажем, что гомотетия $\Gamma\left\{S_2, \frac{r_2}{r_1}\right\}$ преобразует окружность ω_1 в окружность ω_2. Легко убедиться прежде всего, что точка O_2 гомотетична точке O_1. Действительно: 1) S_2, O_1 и O_2 лежат на одной прямой; 2) $S_2O_2:S_2O_1=r_2:r_1$ в силу самого выбора точки S_2. При этом S_2 — внешний центр подобия, так как $\frac{r_2}{r_1}>0$. Пусть теперь P — произвольная точка окружности ω_1, P' — гомотетичная ей точка. Тогда в силу свойства 2 (стр. 34) $O_2P':O_1P=r_2:r_1$. Но так как $O_1P=r_1$, то $O_2P'=r_2$. Итак, точка P', гомотетичная точке P в гомотетии $\left\{S_2, \frac{r_2}{r_1}\right\}$, располагается на окружности ω_2. Нетрудно проверить, что и, обратно, каждая точка окружности ω_2 гомотетична некоторой точке окружности ω_1 (в гомотетии $\left\{S_2, \frac{r_2}{r_1}\right\}$. Поэтому окружности ω_1 и ω_2 перспективно-подобны относительно центра подобия S_2. Подобным же образом можно показать, что данные окружности перспективно-подобны относительно центра S_1, если рассматривать гомотетию относительно этого центра с коэффициентом $-\frac{r_2}{r_1}$.

Из хода доказательства последней теоремы выясняется следующий способ построения центров подобия двух неравных и неконцентричных окружностей $\omega_1(O_1, r_1)$ и $\omega_2(O_2, r_2)$.

Изберем произвольную точку P на окружности ω_1 (вне линии центров). Проводим диаметр $P'P''$ окружности ω_2, параллельный O_1P (рис. 306). Если радиусы O_1P и O_2P' направлены одинаково, а радиусы O_1P и O_2P'' противоположно, то в пересечении прямой PP' с линией центров образуется внешний (S), а в пересечении прямой PP'' с линией центров — внутренний (S_1) центры подобия данных окружностей.

Наше рассуждение проведено в предположении, что точки O_1 и O_2 различны. Если же данные окружности концентричны, то их общий центр служит для них как внутренним, так и внешним центром подобия. Доказательство предоставляется читателю.

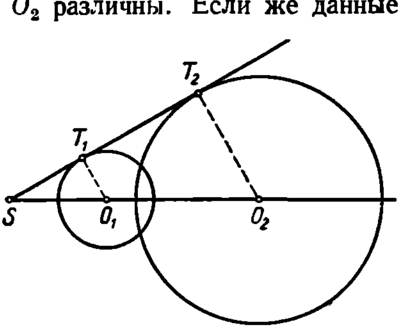


Рис. 307.

Предыдущая теорема остается в силе и в том случае, если данные окружности не лежат в одной плоскости, но их плоскости параллельны.

Теорема. *Если две неравные окружности имеют общую внешнюю касательную, то она проходит через их внешний центр подобия.*

Доказательство. Пусть (рис. 307) T_1 и T_2 — точки касания окружностей ω_1 и ω_2 к их общей внешней касательной.

Прямая T_1T_2 пересекает линию центров в некоторой точке S. Из подобия треугольников SO_1T_1 и SO_2T_2 следует, что

$$SO_2:SO_1=r_2:r_1.$$

С другой стороны, S — вне отрезка O_1O_2, так как касательная T_1T_2 внешняя. Поэтому точка S совпадает с внешним центром подобия.

Аналогично доказывается и такая теорема: *Если две окружности имеют общую внутреннюю касательную, то она проходит через их внутренний центр подобия.*

Если две окружности касаются, то точка их касания является их центром подобия. В самом деле, в этом случае точка касания делит отрезок, соединяющий центры окружностей, внешним или внутренним образом в отношении, равном отношению радиусов данных окружностей, и поэтому согласно предыдущему служит центром подобия.

4. Достаточно ясно, что *последовательное осуществление двух гомотетий с одним и тем же центром даст в результате гомотетию с тем же центром.* Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в этом и определить положение центра и величину коэффициента этой «результирующей» гомотетии. В следующей теореме рассмотрим более общий случай.

Теорема. *Если $k_1k_2 \neq 1$, то произведение двух гомотетий* $\Gamma_1\{S_1, k_1\}$ и $\Gamma_2\{S_2, k_2\}$ *есть некоторая гомотетия* $\Gamma\{S, k\}$, *причем* $k = k_1 \cdot k_2$ *и точка S лежит на прямой S_1S_2.*

Доказательство. Обозначим преобразование $\Gamma_2 \times \Gamma_1$ через Π. Рассмотрим произвольную пару точек A и B. Если $\Gamma_1\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\Gamma_2\left(\overrightarrow{A_1B_1}\right) = \overrightarrow{A_2B_2}$, то при любых A и B векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ коллинеарны, причем одинаково направлены при $k_1k_2 > 0$ и противоположно направлены, если $k_1k_2 < 0$. Следовательно, чтобы построить образ произвольной точки M в преобразовании Π, надо провести через A_2 и B_2 прямые, соответственно параллельные прямым AM и BM, и взять точку их пересечения.

Рассмотрим теперь гомотетию Γ, определяемую парами соответственных точек: $A \to A_2$, $B \to B_2$. Центр S и коэффициент k этой гомотетии существуют и определяются однозначно.

1) $S \equiv AA_2 \times BB_2$, точка S существует, так как $A_2B_2 = |k_1k_2| \cdot AB$ и при условии $k_1k_2 \neq 1$ $A_2B_2 \neq AB$, так что $AA_2 \not\parallel BB_2$.

2) $|k| = \frac{A_2B_2}{AB}$; $k > 0$, если A_2B_2 и AB одинаково ориентированы; $k < 0$, если A_2B_2 и AB ориентированы противоположно. Значит, образ произвольной точки M в гомотетии Γ можно строить точно так же, как в преобразовании Π. Следовательно, преобразование Π и есть гомотетия Γ.

Осталось доказать, что точка S принадлежит прямой S_1S_2. С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1S_1}$. Гомотетия Γ_1 преобразует его в коллинеарный вектор $\overrightarrow{A_1S_1}$ (рис. 308). Гомотетия Γ_2 преобразует вектор $\overrightarrow{A_1S_1}$ в коллинеарный ему вектор $\overrightarrow{A_2S_0}$, причем точка S_0 лежит на прямой S_1S_2. Следовательно, $\Gamma\left(\overrightarrow{AS_1}\right) = \overrightarrow{A_2S_0}$, так что в гомотетии Г точки S_1 и S_2 являются соответственными, и, следовательно, центр этой гомотетии лежит на прямой S_1S_0 или, что то же, на прямой S_1S_2, что и требовалось доказать.

В дополнение к последней теореме заметим, что если $k_1k_2=1$, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_2B_2}$ для любых точек A и B. Следовательно, для любых двух точек A и B $\overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{BB_2}$, т. е. вектор $\overrightarrow{MM'}$, соединяющий произвольную точку M с ее образом M' в преобразовании П, постоянен. Значит, преобразование П есть в этом случае преобразование параллельного переноса.

Чтобы распространить предыдущую теорему и на этот случай, некоторые авторы рассматривают перенос как предельный случай

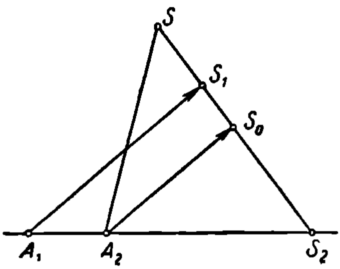


Рис. 308.

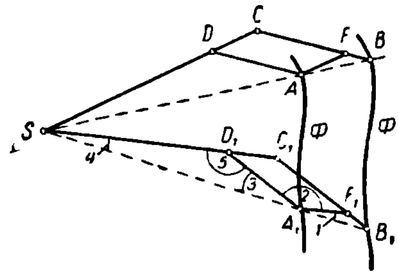


Рис. 309.

гомотетии, когда центр ее неограниченно удаляется. При таком расширенном понимании гомотетии предыдущая теорема сохраняет силу и в случае $k_1k_2=1$. Две фигуры, гомотетичные одной и той же третьей, оказываются «в широком смысле» гомотетичными, хотя и не исключена возможность, что центр этой гомотетии бесконечно удален, а коэффициент равен единице, т. е. одна из этих фигур преобразуется в другую параллельиым переносом.

5. Существуют приборы, позволяющие вычерчивать фигуру, перспективно-подобную начерченной фигуре, притом с любым положительным коэффициентом подобия. Такие приборы называются *пантографами*, оии применялись еще в начале XVII в. Пантограф (рис. 309) состоит из четырех стержней SC, BC, DA и DF, скрепленных шарнирно в точках D, C, F и A. Эти точки выбираются так, что в некотором начальном положении пантографа четырехугольник $ADCE$ — параллелограмм, причем точки A и B лежат на одном луче, исходящем из точки S. Точка S закрепляется на плоскости неподвижно. Пусть длины стержней BC и AD равны соответственно m и n. Когда точка A опишет какую-либо фигуру Ф, то точка B опишет фигуру Ф', соответствующую фигуре Ф в гомотетии с центром в точке S и коэффициентом $k=\frac{m}{n}$. Докажем это.

Пусть в некоторый момент пантограф расположен так, что точки A, B, C, D, F занимают соответственно положение A_1, B_1, C_1, D_1, F_1, причем точка A_1 лежит на линии Ф. Покажем, что точка B_1 гомотетична точке A_1 в гомотетии $\left\{S; \frac{m}{n}\right\}$. Для этого нужно показать, что: 1) точки A_1 и B_1 лежат на одном луче, исходящем из точки S (для чего достаточно показать, что,

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°;\ 2)\ SB_1:SA_1=m:n.$$

Так как при перемещении пантографа его стержни не меняют своей длины, то $SD_1=SD$; $SC_1=SC$; $D_1A_1=DA$; $D_1C_1=DC$; $A_1F_1=AF$; $C_1F_1=CF$. По условию $ADCF$ — параллелограмм. Следовательно,

$$AF=DC,\ AD=CF. \tag{1}$$

Поэтому $A_1F_1=D_1C_1$, $A_1D_1=C_1F_1$, т. е. $A_1D_1C_1F_1$ также параллелограмм. Значит, $D_1C_1 \parallel A_1F_1$. Поэтому

$$\angle A_1F_1B_1=\angle 5=\angle 2. \tag{2}$$

Кроме того, из подобия треугольников SDA и AFB следует, что $AF:BF=SD:AD$, значит,

$$A_1F_1:B_1F_1=SD_1:A_1D_1. \tag{3}$$

Из (2) и (3) ясно, что $\triangle SD_1A_1 \backsim \triangle A_1F_1B_1$. Поэтому $\angle 1=\angle 4$. Отсюда следует, что A_1 и B_1 лежат на одном луче, исходящем из точки S. Кроме того, ясно, что $SB_1:SA_1=B_1C_1:A_1D_1$. Но так как $(B_1C_1)=(BC)$ $(=m)$, $(A_1D_1)=(AD)$ $(=n)$, то $SB_1:S_1A=m:n$, что и требовалось доказать.

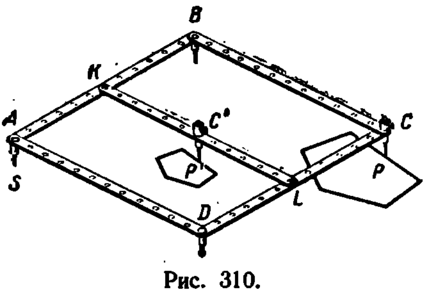


Рис. 310.

На рисунке 310 приведено схематическое изображение пантографа простейшего типа, пригодного для осуществления прямой гомотетии с рациональным коэффициентом (конечно, с известными ограничениями).

$ABCD$ — ромб. Подвижная планка KL устанавливается так, чтобы $BK:BA=k$, $KL \parallel AD$; подвижной шрифт C' — так, чтобы $LC':LK=k$. После этого точки S, P и P' располагаются на одной прямой и $SP':SP=k$, так что точка P' описывает гомотетичную фигуру, если закрепить точку S (в центре гомотетии), а точку P заставить описывать данную фигуру.

§ 50. ПОДОБИЕ

Обобщением понятия гомотетии является общее преобразование подобия. Преобразованием подобия называется произведение прямой гомотетии Γ на движение D, т. е. преобразование вида $D\cdot\Gamma$ или $\Gamma\cdot D$. Если $D=T$ (где T — тождественное преобразование), то подобие есть гомотетия. Если $\Gamma=T$ (т. е. коэффициент гомотетии равен 1), то подобие есть движение.

Фигура Φ' называется подобной фигуре Φ (пишут: $\Phi' \backsim \Phi$), если существует преобразование подобия, преобразующее фигуру Φ в фигуру Φ'. Так, например, в пространстве любая окружность подобна любой другой окружности, любой куб подобен любому другому кубу, так как если даны две окружности (или два куба), то всегда можно построить третью окружность (куб), гомотетичную первой из них и равную другой.

Из определения следует, что *отношение подобия взаимно*. Действительно, пусть $\Phi' \backsim \Phi$. Это означает, что существует такая прямая гомотетия Γ и такое движение D, что $\Gamma \times D(\Phi)=\Phi'$. Образуем гомотетию Γ', обратную гомотетии Γ. Тогда $\Gamma'(\Phi')=D(\Phi)$. Образуем движение D', обратное движению D. Тогда $D' \times \Gamma'(\Phi')=\Phi$, а это означает по определению, что $\Phi' \backsim \Phi$.

Теорема. *Два одноименных плоских многоугольника подобны, если стороны одного из них соответственно пропорциональны сторонам второго, а углы, образуемые соответственными сторонами, равны.*

Действительно, пусть даны два плоских многоугольника: $M(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ и $M'(A_1', A_2', \ldots, A_n')$, причем $A_i' A_{i+1}' : A_i A_{i+1} = k$ (k — постоянное) и $\angle A_{i-1}' A_i' A_{i+1}' \equiv \angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$. Построим многоугольник $M''\{A_1'', A_2'', \ldots, A_n''\}$, соответственный первому в какой-либо прямой гомотетии Γ с коэффициентом k. Этот третий многоугольник будет равен второму из данных многоугольников согласно упомянутому в § 3 этой главы признаку равенства плоских многоугольников, так как:

1) из $A_i' A_{i+1}' : A_i A_{i+1} = k$ (по условию) и $A_i'' A_{i+1}'' : A_i A_{i+1} = k$ (по свойству гомотетии) следует, что $A_i' A_{i+1}' = A_i'' A_{i+1}''$;

2) из $\angle A_{i-1}' A_i' A_{i+1}' = \angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ (по условию) и $\angle A_{i-1}'' A_i'' A_{i+1}'' = \angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ (по свойству гомотетии) следует, что $\angle A_{i-1}' A_i' A_{i+1}' = \angle A_{i-1}'' A_i'' A_{i+1}''$. Следовательно, существует такая прямая гомотетия Γ, что $\Gamma(M)=M''$ и существует такое движение D, что $D(M'')=M'$. Поэтому $D\cdot\Gamma(M)=M'$.

Аналогичный признак подобия имеет место и для многогранников. Прежде чем формулировать этот признак, введем понятие *об* изоморфизме многогранников.

Будем называть элементами многогранника его вершины, ребра, грани, плоские, двугранные и многогранные углы.

Два многогранника будем называть **изоморфными**, если между одноименными их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждый раз сохраняется отношение принадлежности соответственных элементов (например, принадлежность данного ребра данной грани или данного плоского угла данному многогранному углу).

Приведем теперь признак подобия многогранников.

Теорема. *Если каждая грань одного из двух изоморфных многогранников подобна соответственной грани другого, причем коэффициенты подобия каждых двух соответственных граней имеют одну и ту же величину $k>0$, и если каждый многогранный угол первого многогранника равен соответственному многогранному углу второго, то эти многогранники подобны.*

На доказательстве этого предложения мы останавливаться не будем: в существенных чертах оно повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Можно показать, что справедливы также предложения, обратные двум последним теоремам.

При $k=1$ последняя теорема превращается в признак равенства многогранников.

Для некоторых частных видов многогранников можно формулировать более эффективные признаки подобия, нежели последняя теорема.

Так например, *два тетраэдра подобны, если* имеет место один из следующих признаков: 1) *двугранный угол одного тетраэдра равен двугранному углу другого тетраэдра и грани, между которыми заключены эти углы, в одном и другом тетраэдре, соответственно подобны и одинаково расположены;* 2) *если грани одного тетраэдра соответственно подобны одинаково расположенным с ними граням другого тетраэдра;* 3) *если грань одного тетраэдра подобна грани другого тетраэдра и три двугранных угла, прилежащих к этой грани в одном тетраэдре, равны соответственным двугранным углам другого тетраэдра.*

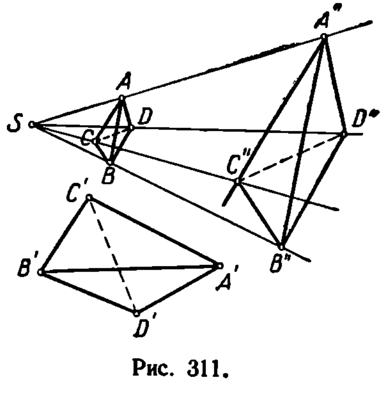


Рис. 311.

Докажем для примера первый из этих признаков.

Пусть (рис. 311)

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C', \quad \triangle ABD \backsim \triangle A'B'D',$$

причем $A'B':AB=k$, и двугранный угол $CABD$ равен двугранному углу $C'A'B'D'$. Построим третий тетраэдр $A''B''C''D''$, гомотетичный тетраэдру $ABCD$ в гомотетии с коэффициентом k. Тогда этот третий тетраэдр равен тетраэдру $A'B'C'D'$.

Действительно:

1) из $A'B':AB=k$ (по условию) и $A''B'':AB=k$ (по свойству гомотетии) следует, что $A''B''=A'B'$ (также и для ребер $A''C''$, $B''C''$ и $A''D''$). Поэтому $\triangle A''B''C''=\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''D''=$ $=\triangle A'B'D'$;

2) из того, что двугранный угол $C''A''B''D''$ равен двугранному углу $CABD$ (по свойству гомотетии) и двугранный угол $C'A'B'D'$ равен двугранному углу $CABD$ (по условию), следует, что двугранный угол $C''A''B''D''$ равен двугранному углу $C'A'B'D'$.

Осуществим движение, преобразующее треугольник $A''B''C''$ в равный ему треугольник $A'B'C'$. Это движение преобразует двугранный угол $C''A''B''D''$ в равный ему двугранный угол, т. е. в двугранный угол $C'A'B'D'$. Так как при этом точки A'' и B'' преобразуются соответственно в точки A' и B', то угол $A''B''D''$ преобразуется в равный ему угол $A'B'D'$, а угол $B''A''D''$ — в равный ему угол $B'A'D'$, т. е. точка D'' — в точку D'. Таким образом, существует движение, преобразующее тетраэдр $A''B''C''D''$ в тетраэдр $A'B'C'D'$, т. е. эти тетраэдры равные.

Итак, $\Gamma(ABCD)=A''B''C''D''$, и существует такое движение D, что $D(A''B''C''D'')=A'B'C'D'$. Следовательно, $D\times\Gamma(ABCD)=A'B'C'D'$. Это и означает, по определению, что тетраэдр $ABCD$ подобен тетраэдру $A'B'C'D'$.

Два других признака подобия тетраэдров можно доказать таким же путем.

В школьном курсе обычно доказывают, что подобные многоугольники можно разложить на соответственно подобные треугольники. Для многогранников справедливо аналогичное предложение: *Два подобных многогранника могут быть разложены на соответственно подобные тетраэдры* (с одним и тем же коэффициентом подобия).

Известно, что площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Составляя производную пропорцию из равных отношений площадей граней подобных многогранников, отсюда тотчас же приходим к выводу: *отношение площадей поверхностей подобных многогранников равно квадрату коэффициента подобия.*

Нетрудно проверить, что соответственные высоты подобных тетраэдров пропорциональны соответственным ребрам. Отсюда легко заключить, что объемы подобных тетраэдров относятся как кубы соответственных их ребер: если коэффициент подобия равен k, то отношение объемов подобных тетраэдров

$$v_1:v_2=\left(\frac{1}{3}S_1h_1\right):\left(\frac{1}{3}S_2h_2\right)=\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}=k^2\cdot k=k^3.$$

А так как два подобных многогранника можно разложить на соответственно подобные тетраэдры, то имеет место следующее предложение: *отношение объемов подобных простых многогранников равно кубу коэффициента подобия.*

§ 51. ИНВЕРСИЯ

1. Все рассмотренные нами до сих пор точечные преобразования обладали свойством преобразовать прямую в прямую. Такие преобразования объединяются под общим названием коллинеаций. Рассмотрим теперь одно преобразование, не относящееся к числу коллинеаций. Это преобразование стали изучать и применять к решению некоторых задач, не поддававшихся решению ранее известными средствами, с 30-х годов прошлого века.

Пусть дана некоторая точка O и некоторый отрезок (или число) R. Будем сопоставлять каждой точке M такую точку M' луча OM, для которой $OM \cdot OM' = R^2$. Такое преобразование называется инверсией (от лат. inversio — обращение). Точка O называется центром инверсии, отрезок R — радиусом инверсии, точка M' — инверсной (иногда — обратной) точке M относительно точки O при радиусе R. Фигура, образованная всеми точками, инверсными точкам данной фигуры, называется фигурой, инверсной данной фигуре. Удобно представлять себе сферу (O, R) и говорить об инверсии относительно этой сферы. Сферу (O, R) мы будем называть базисной сферой инверсии.

Отметим некоторые простейшие свойства инверсии, непосредственно вытекающие из определения.

1) Если точка P' инверсна точке P, то и, обратно, точка P инверсна точке P' (в том же преобразовании).

2) Если при инверсии фигура Φ преобразуется в фигуру Φ', то и, наоборот, эта инверсия преобразует фигуру Φ' в фигуру Φ.

3) Никакая точка не является инверсной для центра инверсии, центр инверсии не имеет образа.

4) Для всех точек, отличных от центра инверсии, инверсия является взаимно однозначным соответствием.

5) Каждая точка базисной сферы, инверсна себе.

6) Если данная точка лежит вне базисной сферы, то инверсная ей точка лежит внутри этой сферы и обратно.

7) Если одна из двух взаимно инверсных точек неограниченно удаляется от центра инверсии, то другая неограниченно приближается к нему, и обратно.

8) При инверсии луч, исходящий из центра инверсии, преобразуется в себя. При этом часть луча, внутренняя относительно базисной сферы, преобразуется в его внешнюю часть, и обратно.

9) При инверсии прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется в себя (конечно, при этом имеется в виду, что центр инверсии удален из этой прямой).

10) При инверсии плоскость, проходящая через центр инверсии (без центра инверсии), преобразуется в себя.

Наиболее существенной для приложений является инверсия, рассматриваемая в пределах некоторой плоскости. При этом данное выше определение инверсии сохраняется, но вместо базисной сферы в этом случае надо рассматривать базисную окружность (O,R).

В пределах плоскости можно выполнить построение точки, инверсной данной, посредством циркуля и линейки. Построение это основано на двух теоремах, известных из школьного курса геометрии:

1) Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, соединяющему центр с точкой касания.

2) Катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией данного катета на гипотенузу.

Следует рассмотреть три случая построения.

1-й случай. Точка M лежит на базисной окружности. Инверсная точка — сама точка M.

2-й случай. Точка M вне базисной окружности. Строим луч OM (рис. 312). Через точку M проводим касательную MT к ба-

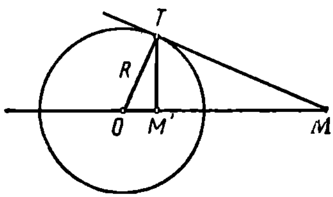


Рис. 312.

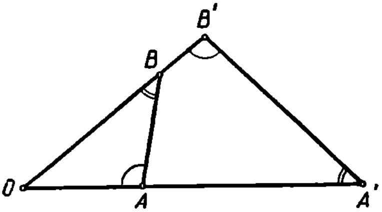


Рис. 313.

зисной окружности. Из точки касания T опускаем перпендикуляр на прямую OM. Основание этого перпендикуляра M' является точкой, инверсной точке M. Действительно, из прямоугольного треугольника OMT видно, что $OM \cdot OM' = OT^2 = R^2$.

3-й случай. Точка M внутри базисной окружности. Ввиду взаимности соответствия точек M и M' при инверсии этот случай сводится к построению прообраза по образу в условиях предыдущего случая.

Остановимся на одном свойстве инверсных точек, которое используется в дальнейшем при рассмотрении вопроса о преобразовании фигур в инверсии.

Пусть (рис. 313) точки A' и B' соответственно инверсны точкам A и B относительно сферы (или окружности) (O, R).

Тогда $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, так что $OA : OB = OB' : OA'$. Кроме того, в треугольниках AOB и $B'O'A'$ угол O общий. Следовательно, $\triangle AOB \backsim \triangle B'O'A'$ и, значит,

$$\angle OBA = \angle OA'B', \quad \angle OAB = \angle OB'A'.$$

Если две прямые пересекают стороны некоторого угла так, что одна из них образует с одной из сторон такой же угол, какой другая прямая образует с другой его стороной (каждый раз имея в виду угол, принадлежащий треугольнику, отсекаемому прямой от данного угла), то такие две прямые называют **антипараллельными**. Антипараллельными являются, например, прямые c и d на рисунке 314, где $c \perp k$ и $d \perp l$.

Антипараллельные прямые, вообще говоря, не параллельны. Исключение составляет только случай, когда обе прямые перпендикулярны биссектрисе данного угла (рис. 315).

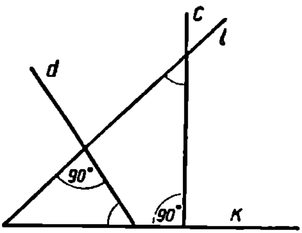


Рис. 314.

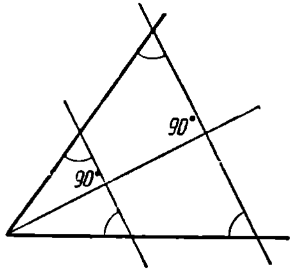


Рис. 315.

Предыдущее рассуждение показывает, что прямая, соединяющая две данные точки, и прямая, соединяющая две инверсные им точки, антипараллельны относительно угла, вершина которого находится в центре инверсии, а стороны проходят через данные точки.

Заметим еще, что из подобия треугольников OAB и $OB'A'$ (рис. 313) вытекает, что

$$A'B' : AB = OA' : OB,$$

откуда следует, что $A'B' = \frac{AB \cdot OA'}{OB}$. Но $OA' = \frac{R^2}{OA}$, так что

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

Последнее соотношение выражает расстояние между точками A' и B', соответственно инверсными двум данным точкам A и B, через расстояние между данными точками и расстояния данных точек от центра инверсии.

2. Напомним, что при инверсии каждая прямая, проходящая через центр инверсии, а также каждая плоскость, проходящая через центр инверсии, преобразуется в себя. Выясним теперь, как преобразуются в инверсии некоторые другие фигуры.

Теорема. *Инверсия преобразует плоскость, не проходящую через центр инверсии, в сферу, проходящую через центр инверсии.*

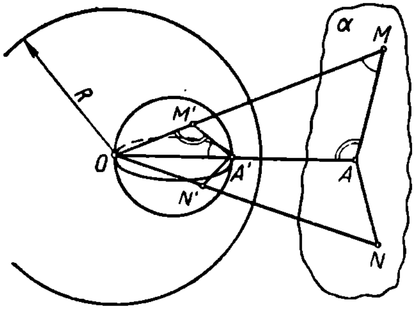


Рис. 316.

Рассмотрим преобразование плоскости α (рис. 316) относительно базисной сферы (O, R).

Пусть A — ортогональная проекция O на плоскость α, A' — точка, инверсная точке A.

Если M — произвольная точка плоскости α, то $AM \perp OA$. Если M' — точка, инверсная M, то $A'M' \perp OM$, так как прямая $A'M'$ антипараллельна прямой AM относительно угла AOM. Значит, (постоянный) отрезок OA' виден из (переменной) точки M' под прямым углом, т. е. все точки M', инверсные точкам плоскости α, лежат на сфере, построенной на отрезке OA' как на диаметре.

Обратно, если N' — произвольная точка указанной сферы и N — ее прообраз, то $\angle OAN = \angle ON'A' = 90^\circ$, так что прямая AN и, в частности, ее точка N лежит в плоскости α, т. е. для каждой точки этой сферы ее прообраз лежит в плоскости α (за исключением точки O, которая вообще не имеет прообраза).

Следствие 1. В силу свойства взаимности (п. 1, свойство 2) *инверсия преобразует сферу, проходящую через центр инверсии, в плоскость, не проходящую через центр инверсии.*

Следствие 2. *Инверсия преобразует прямую, не проходящую через центр инверсии, в окружность, проходящую через центр инверсии,* так как такую прямую можно представить себе как пересечение двух плоскостей, которые преобразуются соответственно в две сферы, проходящие через центр инверсии (и диаметры которых, исходящие из общей точки, образуют такой же угол, какой и указанные плоскости).

Теорема. *Инверсия преобразует сферу, не проходящую через центр инверсии, в сферу, также не проходящую через центр инверсии.*

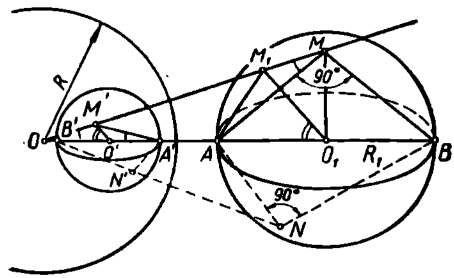


Рис. 317.

Пусть (рис. 317) O — центр инверсии, (O_1, R_1) — данная сфера, A и B — точки пересечения прямой OO_1 с данной сферой, A' и B' — соответственно инверсные им точки.

Если M — любая точка сферы (O_1, R_1) и M' — инверсная ей точка, то, по свойству антипараллельности,

$$\angle OA'M' = \angle OMA,$$

$$\angle OB'M' = \angle OMB$$

и, следовательно, $\angle A'M'B'$, равный разности углов $OB'M'$ и $OA'M'$, по свойству внешнего угла треугольника $A'M'B'$ равен также разности углов OMB и OMA, т. е. равен 90°. Это означает, что точка M' лежит на сфере, построенной на постоянном отрезке $A'B'$ как на диаметре.

Обратно, так как для каждой точки N' последней сферы $\angle A'N'B' = 90°$, то для ее прообраза N $\angle ANB = 90°$, что устанавливается так же, как и выше. А это означает, что этот прообраз принадлежит данной сфере.

Следствие 3. *Инверсия преобразует окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность* (также не проходящую через центр инверсии). Для доказательства проще всего представить данную окружность как пересечение плоскости и сферы.

При всех ранее рассмотренных нами преобразованиях (перенос, вращение, симметрия, гомотетия) сфера преобразовалась в сферу, причем центр данной сферы преобразовался в центр ее образа. При инверсии, как мы установили, сфера также преобразуется в сферу. Однако можно показать, что *центры инверсных сфер не являются соответственными точками в данной инверсии.*

Теорема. *Две инверсно соответственные сферы* (или окружности) *можно рассматривать так же, как гомотетичные, причем центр гомотетии совпадает с центром данной инверсии, а коэффициент гомотетии равен отношению радиусов этих сфер.*

Для доказательства обратимся еще раз к рисунку 317. Пусть M_1 — вторая точка пересечения прямой OM со сферой $\sigma(O_1, R_1)$. Тогда, с одной стороны, $\angle BMO = \angle OB'M' = 180° - \angle A'B'M'$ в силу антипараллельности, а с другой стороны, $\angle BMO = 180° - \angle BAM_1$ по свойству противолежащих углов вписанного (в окружность большого круга сферы σ) четырехугольника $ABMM_1$. Следовательно, $\angle A'B'M' = \angle BAM_1$. Отсюда, рассматривая равнобедренные треугольники $O'B'M'$ и O_1M_1A, легко заключить, что, $\angle B'O'M' = \angle AO_1M_1$, так что $M'O' \parallel M_1O_1$, а поэтому $OM' : OM_1 = O'M' : O_1M_1 = \text{const}$. Таким образом, сфера $\sigma'(O', O'M')$ соответствует сфере σ в гомотетии $\Gamma\left\{O, \dfrac{O'M'}{O_1M_1}\right\}$, причем эта гомотетия преобразует точку M_1 в точку M', в то время как данная инверсия преобразует M в M'.

3. Из сказанного ясно, что инверсия существенно изменяет вид фигур. На рисунке 318 показано, во что преобразуется квадрат, вписанный в базисную окружность. На рисунке 319 изображена «инверсия 49-клеточной шахматной доски».

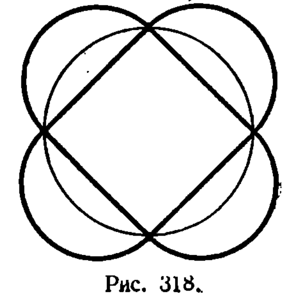


Рис. 318.

Особенно интересно отметить, что инверсия обладает свойством **конформности**, т. е. свойством сохранять угол между линиями.

Пусть (рис. 320) инверсия относительно сферы (O, R) преобразует две исходящие из одной точки A линии λ_1 и λ_2 соответственно в линии λ_1' и λ_2', которые пересекаются в точке A', инверсной точке A.

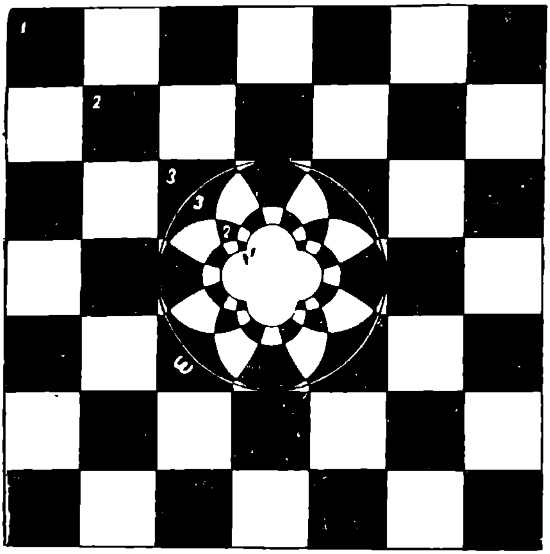


Рис. 319. Фигура, расположенная внутри окружности ω, является инвертированным изображением части плоскости, расположенной вне окружности. Точки, находящиеся вне шахматной доски, после инверсии окажутся в пустой (белой) части круга. Номера данной фигуры показывают соотношение некоторых клеток шахматной доски в их инвертированном «изображении».

Проведем через точку O какой-либо луч OM, пересекающий линии λ_1 и λ_1' в соответственных точках B и B', и луч ON, пересекающий линии λ_2 и λ_2' в соответственных точках C и C'. Тогда

$$\triangle BOC \backsim \triangle C'O'B',$$

так что $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{OC'}{OB} = \dfrac{R^2}{OC \cdot OB}$.

Аналогично:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{R^2}{OA \cdot OB}, \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{R^2}{OA \cdot OC}.$$

Если оба луча OM и ON неограниченно сближать с лучом OA, то в пределе отрезки OB и OC обратятся в OA. Из предыдущих формул видно поэтому, что в пределе

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC},$$

т. е. треугольники ABC и $A'B'C'$ «подобны в бесконечно малом»[1]. Но при этом секущие AB, AC, $A'B'$ и $A'C'$ будут стремиться к касательному расположению, а углы BAC и $B'A'C'$ станут в пределе углами между линиями λ_1 и λ_2 и соответственно между λ_1' и λ_2'.

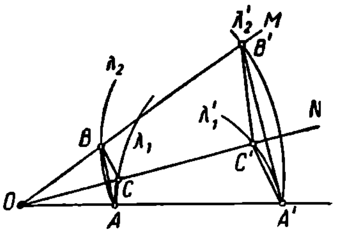


Рис. 320.

Итак, углы между касательными к λ_1 и λ_2 и соответственно к λ_1' и λ_2' равны, т. е. *инверсия сохраняет без изменения угол между двумя линиями.* В частности, ортогональные линии преобразуются в ортогональные, а соприкасающиеся — в соприкасающиеся.

4. В заключение этого параграфа отметим связь между инверсией и стереографической проекцией.

Для вычерчивания географических карт часто применяется способ стереографической проекции. Сущность этого способа и его свойства удобно выяснить, привлекая понятие об инверсии.

Рассмотрим сферу σ с диаметром d и будем представлять себе эту сферу как земной глобус. Пусть S — какая-либо точка глобуса. Для определенности примем, что S — северный полюс глобуса (рис. 321). Рассмотрим инверсию с центром в точке S и радиусом $R=d$. При такой инверсии сфера σ преобразуется в плоскость π, проходящую через южный полюс O глобуса и касающуюся сферы σ. При этом каждая точка сферы σ (кроме полюса S) перейдет в какую-либо точку плоскости π, каждая линия на сфере σ (очертания континентов и островов, реки, границы государств и т. п.) перейдет в какую-то линию на плоскости π, каждая область сферы перейдет в какую-то область плоскости π. Таким образом, картой каждой области сферы окажется соответствующая область плоскости π. Например, картой южного полушария окажется внутренность круга радиуса d с центром в точке O.

Всю (бесконечную) плоскость можно рассматривать как карту земной поверхности. Понятно, что практически такую карту построить нельзя. Поэтому стереографическую проекцию применяют лишь для получения карт отдельных участков земной поверхности.

---

[1] Чтобы придать этому предложению точный смысл, следовало бы выразить тангенсы половин углов BAC и $B'A'C'$ через стороны треугольников BAC и $B'A'C'$, образовать отношения тангенсов соответствующих углов и убедиться, что предел каждого такого отношения равен единице и, значит, предельные значения углов этих треугольников соответственно равны.

Точка A на плоскости π, изображающая точку B на сфере σ, получается как точка встречи луча SB с плоскостью π (см. рис. 321).

Нетрудно подметить, как изобразятся на карте, полученной с помощью стереографической проекции, некоторые простейшие линии на сфере. Экватор изобразится, очевидно, в виде окружности с центром O и радиусом d. Всякая параллель на сфере σ изобразится на карте в виде некоторой окружности с центром в точке O, причем радиус этой окружности будет тем больше, чем «севернее» берется эта параллель (рис. 321). А каждый меридиан изобразится на карте в виде луча, исходящего из точки O.

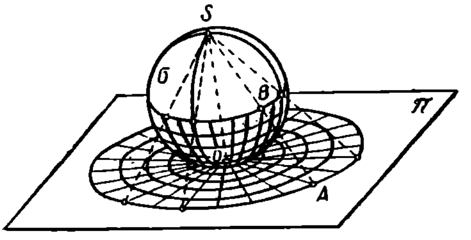


Рис. 321.

При инверсии, как известно, сохраняются углы между двумя линиями. Следовательно, тем же свойством обладает и стереографическая проекция: угол между двумя линиями на земном глобусе будет равен углу между соответствующими линиями на карте. Что касается расстояний или площадей, то они могут значительно изменяться при стереографической проекции.

Кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере измеряется, как известно, по дуге большой окружности (т. е. окружности с центром в центре сферы). Во что же преобразуется окружность при стереографической проекции? На этот вопрос легко ответить, если воспользоваться соответствующими свойствами инверсии. Всякая окружность на глобусе, не проходящая через центр инверсии, изобразится на карте в виде окружности. В частности, в виде окружности изобразится на карте всякая большая окружность, если она не является меридианом. А всякая окружность (a') на глобусе, проходящая через полюс (S), изобразится в виде прямой линии (a) (рис. 322).

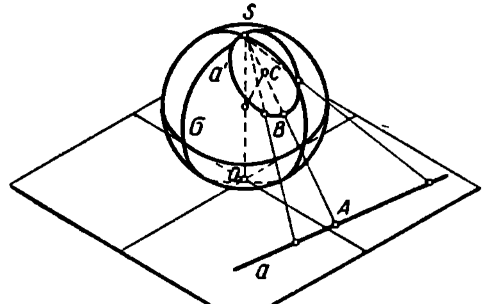


Рис. 322.

5. Существуют приборы, с помощью которых можно без всяких вычислений и без привлечения обычных инструментов геометрических построений вычертить линию, инверсную данной плоской линии. Такие приборы называются **инверсорами**.

Впервые инверсор был предложен французским капитаном

Поселье в 1864 г. Этот прибор получил известность только через семь лет, когда он был, независимо от Поселье, изобретен петербургским студентом Липкиным, видимо, под влиянием идей П. Л. Чебышева. «Клетка Поселье», как принято называть этот инструмент, состоит из шести стержней, связанных шарнирами (рис. 323). Четыре из них составляют ромб $PAQB$. Остальные два стержня равны между собой, каждый из них длиннее стороны ромба $PAQB$.

Обозначим PA через a, OA через l, а разность l^2-a^2 через R^2. Предположим, что точка O закреплена на плоскости. Тогда при

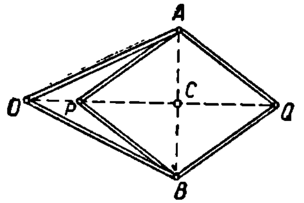


Рис. 323.

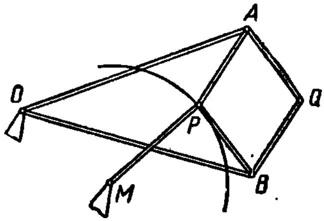


Рис. 324.

любом положении точки P на плоскости точка Q будет ей инверсна относительно окружности $(O,\ R)$. В самом деле: 1) P и Q лежат на одном луче, исходящем из точки O, и 2) $OP\cdot OQ=(OC-PC)\times$ $\times(OC+PC)=OC^2-PC^2=(l^2-AC^2)-(a^2-AC^2)=l^2-a^2=R^2$.

Когда точка P описывает какую-либо линию γ, точка Q описывает инверсную ей линию γ'. В частности, когда P описывает окружность, проходящую через точку O, точка Q опишет прямую. Таким образом, инверсор Поселье позволяет преобразовать вращательное движение в прямолинейное.

Если нужно преобразовать в инверсии окружность радиуса r, то к инверсору присоединяют в точке P шарнирно стержень PM длины r. Если точки O и M закреплены неподвижно так, что стержни OA и OB могут вращаться около точки O, а стержень MP — около точки M (рис. 324), то точка P опишет дугу некоторой окружности, а точка Q — дугу инверсной ей окружности или прямолинейный отрезок (в случае, если $OM=MP$).

§ 52. О ПРИЛОЖЕНИЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОЙСТВ ФИГУР

Геометрические преобразования широко применяются к решению геометрических задач на построение, о чем будет подробно говориться в главе V. Здесь мы приведем несколько примеров других приложений геометрических преобразований.

1) Крышка складного (так называемого «ломберного») столика состоит из двух равных прямоугольников $ABCD$ и $A_0B_0C_0D_0$

(рис. 325), которые в свернутом положении накладываются один на другой. Если нужно разложить столик, то крышка поворачивается на 90° около шипа, укрепленного на основании, после чего раскрывается, образуя квадрат $B'B_0'C_0'C'$, причем оси симметрии этого квадрата совпадают с осями прямоугольника $ABCD$ в его первоначальном положении.

В каком месте основания нужно укрепить шип?

Пусть прямоугольник $ABCD$ после поворота занял положение $A'B'C'D'$; задача сводится к отысканию центра вращения, преобразующего A в A' и B в B'. Этот центр можно найти как точку пересечения симметралей отрезков AA' и BB'.

2) Известно, что площадь некоторого треугольника ABC равна S. Какова будет площадь треугольника, стороны которого соответственно равны медианам треугольника ABC?

Пусть (рис. 326) AA', BB' и CC' — медианы треугольника ABC.

Произведем параллельный перенос медианы AA' на вектор $\overrightarrow{AB'}$. При этом отрезок AA' займет положение $B'A_1$.

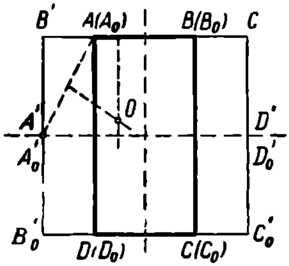


Рис. 325.

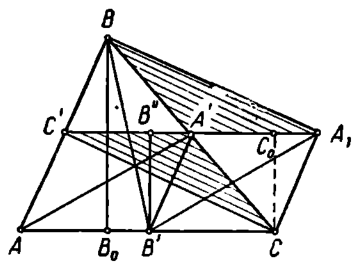


Рис. 326.

Так как в четырехугольнике BA_1CC' диагонали BC и A_1C' взаимно делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм. Следовательно, $A_1B = CC'$, так что треугольник $BB'A_1$ образован из отрезков, соответственно равных медианам данного треугольника.

Треугольник A_1BB' состоит из трех треугольных частей: $A'A_1B$, $A'B'A_1$ и $A'B'B$.

$\triangle A'A_1B = \triangle A'CC'$ по трем сторонам. Но основание $A'C'$ и высота CC_0 треугольника $A'CC'$ соответственно вдвое меньше основания AC и высоты BB_0 данного треугольника ABC, откуда следует, что площадь треугольника $A'CC'$, а следовательно, и треугольника $A'A_1B$ составляет одну четвертую часть площади данного треугольника ABC.

То же можно сказать и о треугольнике $A'BB'$, так как его площадь составляет половину площади треугольника BCB', площадь которого в свою очередь вдвое меньше площади данного треугольника ABC.

Наконец, площадь треугольника $A'A_1B'$ также составляет $\frac{1}{4}S$, так как его основание A_1A' и высота $B'B''$ соответственно равны основанию A_1A' и высоте CC_0 треугольника $A_1A'C$.

Следовательно, площадь треугольника A_1BB' составляет $\frac{3}{4}$ площади S данного треугольника.

3) С применением гомотетии изящно доказывается теорема о прямой Эйлера: *Во всяком треугольнике точка пересечения медиан и точка пересечения высот лежат на одной прямой с центром описанной окружности.*

Доказательство.

Пусть (рис. 327) A_1, B_1, C_1 — основания медиан треугольника ABC, M — точка пересечения медиан, O — точка пересечения высот, P — центр описанной окружности.

Так как все медиаиы треугольника делятся в точке их пересечения в одном и том же отношении, то точка M есть центр гомо-

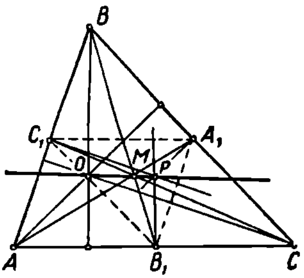


Рис. 327.

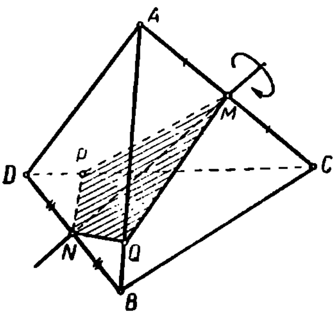


Рис. 328.

тетии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Эта гомотетия преобразует высоты треугольника ABC соответственно в высоты треугольника $A_1B_1C_1$, так как перпендикулярность прямых сохраняется при гомотетии. Но высоты треугольника $A_1B_1C_1$ — это прямые A_1P, B_1P и C_1P. Следовательно, упомянутая гомотетия $\Gamma\left\{M, -\frac{1}{2}\right\}$ преобразует точку O в точку P. А соответственные в гомотетии точки лежат на одной прямой с центром гомотетии.

4) Доказать, что каждая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер правильного тетраэдра, делит его на две равные части.

Пусть (рис. 328) M — середина ребра AC, N — середина ребра BD, $MPNQ$ — сечение данного тетраэдра плоскостью. При этом тетраэдр делится на два пятигранника: $MPQNDA$ и $MPQNBC$.

Повернув секущую плоскость около оси MN на 180°, заметим, что точки M и N останутся на месте, точка A преобразуется в точку C (и обратно), точка D — в точку B (и обратно). Точка P, лежащая на прямой CD, должна преобразоваться в точку прямой AB. С другой стороны, это точка секущей плоскости, и поэтому она должна преобразоваться в точку этой же плоскости. Но Q — единственная точка, принадлежащая как прямой AB, так и секущей плоскости. Значит, точка P преобразуется в точку Q и обратно.

Итак, $M \to M$, $P \to Q$, $Q \to P$, $N \to N$, $D \to B$, $A \to C$, т. е. пятигранник $PMQNDA$ преобразуется в пятигранник $QMPNBC$. Так как один из этих многогранников преобразуется в другой движением, то они равны.

5) Однородная пластинка имеет форму плоского выпуклого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$. Английский математик Дж. Дж. Сильвестр предложил следующий способ построения центра тяжести такой пластинки:

а) строятся (рис. 329) точка Q пересечения диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ и точка O пересечения его средних линий;

б) на продолжении отрезка QO выбирается точка G так, чтобы $OG = \frac{1}{3}OQ$.

Тогда точка G — искомый центр тяжести пластинки.

Дать обоснование этому правилу Сильвестра.

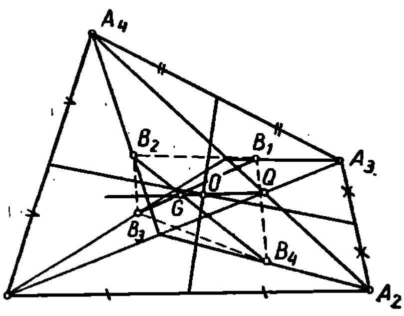


Рис. 329.

Решение. Разобьем четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ диагональю A_2A_4 на два треугольника и отметим их центры тяжести B_1 и B_3. Центр тяжести данного четырехугольника лежит, очевидно, на прямой B_1B_3.

Аналогичным образом разобьем четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ на два треугольника второй диагональю A_1A_3 и отметим центры тяжести этих треугольников B_2 и B_4. Тогда центр тяжести данного четырехугольника лежит и на прямой B_2B_4.

Пусть $G \equiv B_1B_3 \times B_2B_4$. Тогда G и будет искомым центром тяжести четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.

Но G — точка пересечения диагоналей четырехугольника $B_1B_2B_3B_4$. Этот четырехугольник гомотетичен четырехугольнику $A_1A_2A_3A_4$ относительно точки O пересечения средних линий четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, причем коэффициент гомотетии равен $-\frac{1}{3}$. Действительно, пользуясь барицентрическими соображениями, нетрудно убедиться, что точка O лежит на каждом из отрезков A_kB_k и делит его в отношении $1:3$. Но в таком случае точка G пересечения диагоналей четырехугольника $B_1B_2B_3B_4$ соответствует точке Q пересечения диагоналей данного четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ в той же гомотетии. Поэтому точка G действительно может быть получена способом, указанным в условии данного примера.

6) Применяя инверсию, можно дать простое доказательство известной теоремы Птолемея: *Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Доказательство. Пусть (рис. 330) $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в окружность радиуса R.

Подвергнем его инверсии (A, r) (радиус инверсии r — произвольный). При этом вершины B, C, D данного четырехугольника преобразуются соответственно в некоторые точки B', C' и D', расположенные на одной прямой.

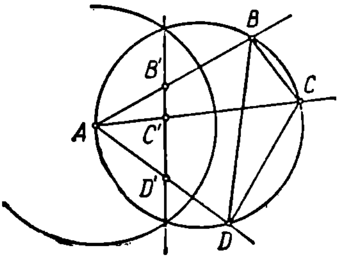


Рис. 330.

Пусть ради определенности C' — между B' и D'. Тогда

$$B'D' = B'C' + C'D' \qquad \ldots (*)$$

По формуле, выведенной в § 10, получаем:

$$B'D' = BD \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AD}; \quad B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC};$$

$$C'D' = CD \cdot \frac{r^2}{AC \cdot AD}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (*), придем после очевидных преобразований к соотношению:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Это соотношение и выражает заключение теоремы Птолемея.

7) В качестве еще одного примера применения инверсии приведем доказательство следующей теоремы Эйлера о центрах вписанной и описанной окружностей: *Расстояние d между центром O окружности, вписанной в некоторый треугольник ABC, и центром S окружности, описанной около того же треугольника, выражается через радиусы этих окружностей r и R по формуле:*

$$d^2 = R^2 - 2Rr. \tag{1}$$

Доказательство. Легко проверить, что формулу Эйлера можно переписать в виде:

$$\frac{r^2}{R-d} + \frac{r^2}{R+d} = r. \tag{2}$$

Такая запись подсказывает целесообразность рассмотрения инверсии относительно вписанной окружности $\omega\ (O, r)$. Действительно, обозначим точки встречи прямой OS с описанной окружностью $\gamma\,(S, R)$ через P и Q (рис. 331). Тогда один из отрезков OP и OQ (на нашем рисунке отрезок OP) равен $R-d$, а второй (OQ) равен $R+d$.

И формула (2) принимает вид:

$$\frac{r^2}{OP}+\frac{r^2}{OQ}=r,$$

или

$$OP'+OQ'=r, \tag{3}$$

где P' и Q' — точки, инверсные точкам P и Q относительно вписанной окружности ω.

Итак, нам надо доказать формулу (3).

Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Рассмотрим точки A_2, B_2, C_2, в которых лучи OA, OB, OC встречают стороны треугольника $A_1B_1C_1$. Ясно, что $OA_2 \perp B_1C_1$. Рассматривая прямоугольный треугольник AC_1O и его высоту C_1A_2, убеждаемся, что

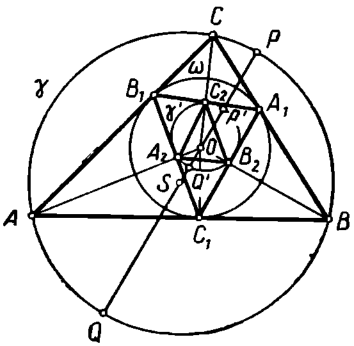


Рис. 331.

$$OA\cdot OA_2=OC_1^2=r^2,$$

т. е. точки A и A_2 взаимно инверсны относительно вписанной окружности ω. Аналогично можно убедиться, что точки B_2 и C_2 соответственно инверсны точкам B и C. Тогда при инверсии относительно окружности ω окружность γ, описанная около треугольника ABC, преобразуется в окружность γ', которая описана около треугольника $A_2B_2C_2$. Но треугольник $A_2B_2C_2$ имеет своими вершинами середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, так что он подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ и его стороны вдвое меньше соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$.

Следовательно, и диаметр δ окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$, вдвое меньше диаметра окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. $\delta=r$.

При инверсии относительно окружности ω диаметр PQ окружности γ перейдет в некоторый диаметр $P'Q'$ окружности γ', так что $P'Q'=\delta=r$, т. е. $OP'+OQ'=r$. Соотношение (3), равносильное формуле Эйлера, доказано.

§ 53. ПОНЯТИЕ О НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФИГУР

В предыдущих параграфах этой главы были описаны некоторые геометрнческие преобразования, а именно: движения, гомотетия, подобие и инверсия. Если учесть, что как движения, так и гомотетия представляют специальные случаи подобия, то окажется, что мы познакомились только с двумя классами геометрических преобразований: с подобными преобразованиями и с инверсией. Преобразования подобия являются наиболее специфичными для элементарной геометрии.

Помимо изученных нами преобразований, в современной геометрии рассматриваются многие другие их виды. Среди них большую роль играют *топологические* (*непрерывные*) преобразования фигур.

Напомним, что окрестностью точки P фигуры Ф относительно фигуры Ф называется часть фигуры Ф, лежащая внутри какого-либо шара с центром в точке P. Например, если Ф — плоскость,

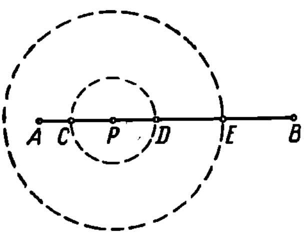


Рис. 332.

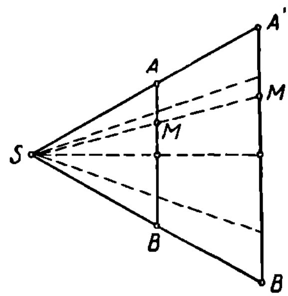


Рис. 333.

то окрестностью ее точки P относительно Ф служит внутренность каждого круга с центром P. А если Ф есть отрезок AB, то окрестностью ее точки относительно этой фигуры может служить интервал (CD на рис. 332) или полуинтервал (AE на рис. 332).

Однооднозначное преобразование фигуры Ф в фигуру Ф′ называется н е п р е р ы в н ы м в точке P, если для каждой окрестности $\omega(P')$ образа P' точки P относительно Ф′ всегда найдется такая окрестность $\omega(P)$ точки P, которая преобразуется в часть окрестности $\omega(P')$. Если одноoднозначное преобразование непрерывно во всякой точке P фигуры Ф, то оно называется *непрерывным преобразованием фигуры* Ф.

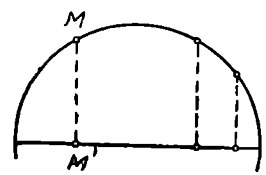


Рис. 334.

Непрерывным является, например, преобразование отрезка AB в отрезок $A'B'$ посредством центрального проектирования (рис. 333) или преобразование полуокружности в ее диаметр посредством прямоугольного проектирования (рис. 334).

Чтобы представить себе пример одноoднозначного преобразования, не являющегося непрерывным, рассмотрим отрезок OE числовой оси (рис. 335), где, например, $OE = 1$. Каждой точке P отрезка OE, для которой (OP) — иррациональное число, будем сопоставлять эту же точку, а каждой точке Q с рациональной длиной (OQ) сопоставим такую точку Q' числовой оси, для которой $OQ' = 2OQ$.

Тогда отрезок OE (фигура Ф) преобразуется в некоторую часть отрезка OA, где $OA=2OE$. Эта часть отрезка OA играет здесь роль фигуры Ф′. Рассмотрим какую-либо точку P' отрезка OE, для которой (OP') — иррациональное число, большее 0,5 $\left(\text{например, } \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right)$, как точку фигуры Ф′. Прообразом этой точки по условию будет та же точка. Образуем какую-либо окрестность (BC на рис. 335) этой точки относительно фигуры Ф′, лежащую целиком внутри отрезка OE. Что же касается (той же) точки P как прообраза, то в каждой ее окрестности относительно Ф найдутся, как известно, такие точки, расстояния которых от точки O рациональны и больше 0,5. Образы этих точек согласно условию лежат вне отрезка OE. Итак, никакая окрестность точки P относительно Ф не преобразуется в часть избранной окрестности точки P' относительно Ф′, так что условие непрерывности преобразования не выполняется.

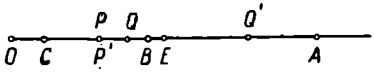


Рис. 335.

Фигуры Ф и Ф′ называются топологически эквивалентными или г о м е о м о р ф н ы м и, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование, которое преобразует одну из них в другую. Наглядно можно представлять себе, что гомеоморфные фигуры образуются одна из другой путем деформации без разрывов и склеиваний.

С помощью установленных здесь понятий можно образовать некоторые важные определения.

Фигуру, гомеоморфную отрезку, называют п р о с т о й д у г о й.

З а м к н у т о й п р о с т о й л и н и е й называют фигуру, гомеоморфную простому многоугольнику (или окружности).

Фигуру, гомеоморфную двумерному квадрату, называют односвязной поверхностью. С наглядной точки зрения это означает, что эластичную квадратную пластинку всегда можно так растянуть (сжать) и изогнуть, чтобы она превратилась в данную о д н о с в я з н у ю п о в е р х н о с т ь.

Систематическая теория непрерывных преобразований составляет предмет особой ветви геометрической науки — т о п о л о г и и.

Вопросы для повторения

Что называется геометрическим преобразованием фигуры?

Когда преобразование называется взаимно однозначным?

Приведите примеры 1 — 1-значных геометрических преобразований, а также преобразований, не являющихся взаимно однозначными.

Какое преобразование называется тождественным?

Что называют произведением двух геометрических преобразований?

В чем состоит свойство ассоциативности геометрических преобразований?

Как определяется преобразование, обратное данному?

Что называется репером?

Приведите пример аксиомы движения.

Назовите несколько важнейших свойств движения.

Приведите примеры параллельных переносов, встречающихся в практике.

При каком расположении определяющих реперов движение называется параллельным переносом?

В чем состоит основное свойство параллельного переноса?

Как проверить, что переносы образуют группу?

При каком расположении определяющих реперов движение называется вращением около оси?

Приведите примеры вращений около оси, заимствованные из практики.

Дайте геометрическую характеристику поворота плоскости около точки.

Как определяется симметрия относительно прямой?

Приведите несколько примеров фигур, имеющих ось симметрии.

Может ли иметь центр симметрии многоугольник с нечетным числом вершин?

Может ли фигура иметь бесконечно много осей симметрии?

Приведите пример, когда пересечение осей симметрии данной фигуры не есть ее центр симметрии.

Почему отражение от плоскости нельзя считать движением?

Как отражение в плоскости связано с движениями?

Приведите примеры фигур, обладающих плоскостью симметрии.

Как строится отражение фигуры в точке?

Приведите примеры фигур, обладающих центром симметрии.

Может ли фигура иметь более одного центра симметрии?

Какое утверждение называют теоремой Бернулли — Шаля?

Как строится точка, гомотетичная данной?

Каким векторным равенством можно определить гомотетию?

Когда гомотетия называется прямой и когда — обратной?

Какое преобразование представляет произведение гомотетии на отражение в ее центре?

Как построить центры подобия двух окружностей?

Что называется в геометрии подобием?

Дайте определение инверсии.

Какие прямые называются антипараллельными?

Во что преобразуется при инверсии прямая; плоскость; сфера; окружность; круг?

В чем состоит свойство конформности геометрического преобразования?

Знаете ли вы преобразование, не обладающее свойством конформности?

Задачи

К § 43—45

1. Пользуясь параллельным переносом, докажите, что треугольник равнобедренный, если две медианы его равны между собой.

2. Докажите, что сумма оснований трапеции меньше суммы ее диагоналей, но больше их разности.

3. Докажите, что треугольннк, имеющий две оси симметрии, имеет и третью ось симметрии.

4. Если фигура имеет две оси симметрии S_1 и S_2, то прямая S_3, симметричная S_1 относительно S_2, также есть ось симметрии этой фигуры. Доказать.

5. Докажите, что если фигура имеет только две оси симметрии, то они перпендикулярны между собой.

6. Докажите, что произведение двух вращений на углы α и β $(0 < \alpha < \beta < 360°)$ есть вращение при $\alpha+\beta \neq 360°$ и параллельный перенос, если $\alpha+\beta=360°$.

7. Как найти центр вращения или вектор переноса произведения двух вращений?

8. Докажите, что произведение трех отражений от параллельных прямых или от прямых, проходящих через одну точку, есть отражение от прямой (на плоскости).

9. Выразите площадь треугольника через его медианы.

10. Во вписанном четырехугольнике, диагонали которого перпендикулярны: а) сумма квадратов двух противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности; 2) расстояние от центра описанной окружности до какой-либо стороны четырехугольника равно половине противоположной стороны. Доказать.

11. Докажите, что после двукратного последовательного отражения точки в вершинах какого-либо треугольника она вернется в первоначальное положение.

12. Докажите, что плоский четырехугольник, в котором отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, равен полусумме двух других сторон, есть трапеция (или параллелограмм).

13. Докажите, что произведение параллельного переноса на отражение в точке O есть отражение в некоторой точке O_1. Как определить положение точки O_1, зная положение точки O и вектор переноса $\vec{v}$?

14. Фигура Φ' образуется из фигуры Φ отражением в плоскости α, а фигура Φ'' — из Φ' отражением в точке O. Определить ось, угол и вектор переноса винтового движения, преобразующего Φ в Φ''.

15. Рассмотрите произведение отражений в двух прямых, если эти прямые: 1) параллельны; 2) пересекаются; 3) скрещиваются.

К § 49

16. Пользуясь произведением двух гомотетий, докажите, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей и через точку пересечения (продолжений) боковых сторон трапеции.

17. Докажите, что три прямые, проведенные через середины сторон треугольника соответственно параллельно биссектрисам противоположных углов, пересекаются в одной точке.

18. Докажите, что две несовпадающие фигуры имеют не более двух центров подобия.

19. Докажите, что центры подобия трех попарно гомотетичных фигур, взятых по две, лежат на одной прямой.

20. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами треугольника, лежат на одной окружности (окружность Эйлера).

К § 50

21. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b и гипотенузой c. Известно также, что в треугольнике $A'B'C'$, подобном треугольнику ABC, сумма катетов $a'+b'$ больше гипотенузы c' на отрезок d. Чему равен коэффициент подобия этих треугольников?

22. Докажите теорему Менелая: «Точки M, N и P, расположенные соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC или на их продолжениях, лежат на одной прямой в том и только в том случае, если произведение отношений, в которых эти точки делят стороны треугольника, равно единице».

23. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. В подобном ему треугольнике $A'B'C'$ сумма площадей квадратов, построенных на его сторонах, равна площади прямоугольника со сторонами p и q. Найдите коэффициент подобия треугольников ABC и $A'B'C'$.

24. Диагонали AD, BE и CF вписанного в окружность шестиугольника $ABCDEF$ сходятся в одной точке в том и только в том случае, если $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$. Докажите эту теорему.

К § 51

25. Если (в плоскости) центр инверсии лежит вне данной окружности, то точка, инверсная центру данной окружности, ближе к центру инверсии, нежели центр преобразованной окружности. Докажите эту теорему.

26. Отношение $\dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AD}{BD}$ называется двойным отношением четырех точек A, B, C и D (и обозначается $(ABCD)$). Докажите, что двойное отношение четырех точек является инвариантом инверсии, т. е. что двойное отношение четырех данных точек равно двойному отношению четырех соответственно инверсных им точек.

27. Как построить образ квадрата, описанного около базисной окружности инверсии?

28. Точки P и Q на земном глобусе симметричны относительно плоскости экватора. Покажите, что на карте соответствующие им точки инверсны относительно окружности γ, изображающей экватор.

29. Точки A' и B' на карте, полученной с помощью стереографической проекции, изображают две точки A и B, лежащие на сфере. Вы измерили стороны треугольника $OA'B'$ и радиус r окружности, изображающей экватор. Вычислите расстояние между точками A и B (т. е. длину хорды AB).

30. Точки A и B на земном глобусе — концы одного и того же диаметра. На карте, полученной с помощью стереографической проекции, указана точка A', изображающая точку A, и окружность, изображающая экватор. Укажите на карте точку B', изображающую точку B.

ГЛАВА V

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

§ 54. ОБЩИЕ АКСИОМЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ. ИНСТРУМЕНТЫ ПОСТРОЕНИЙ

1. Раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называется конструктивной геометрией.

Мы сейчас займемся геометрическими построениями только на плоскости. Некоторые сведения о построениях на других поверхностях и в трехмерном пространстве будут приведены в конце этой главы.

Основным понятием конструктивной геометрии является понятие построить геометрическую фигуру.

Мы примем это понятие без определения. Конкретный его смысл известен из практики, где оно означает то же, что «начертить», «провести» (линию), «отметить» (точку) и т. п. В интересах логической строгости изложения необходимо четко формулировать те основные требования (постулаты), которыми характеризуется это понятие. Эти требования обычно не формулируются в условиях школьного курса элементарной геометрии, но они подразумеваются в процессе решения любой геометрической задачи на построение как нечто само собой разумеющееся. Основные требования (постулаты) конструктивной геометрии выражают в абстрактной форме наиболее существенные моменты чертежной практики. Они являются аксиомами, принимаются без доказательства и служат в дальнейшем логической основой конструктивной геометрии. Перейдем к рассмотрению этих основных положений (аксиом) теории геометрических построений.

Если о какой-либо фигуре сказано, что она дана, то при этом естественно подразумевается, что она уже изображена, начерчена, т. е. построена.

Таким образом, первое основное требование конструктивной геометрии состоит в следующем:

I. *Каждая данная фигура построена.*

Заметим, что не следует смешивать понятия «данная фигура» и «фигура, заданная (или определенная) такими-то данными ее элементами». В последнем случае дана не сама фигура, а лишь некоторые ее элементы, которые определяют положение этой фигуры.

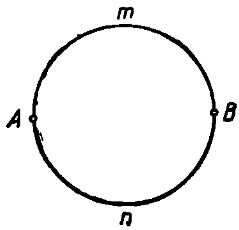


Рис. 336.

Например, если даны две точки прямой, то существует единственная прямая, соединяющая эти точки, т. е. эта прямая определена двумя точками, но это не озиачает, что прямая эта построена (начерчена). Точно так же центр O и точка A на окружности определяют эту окружность по величине и положеиию, но если сказано только, что даны точки O и A, то еще не следует считать (в том смысле, как это понимается в конструктивной геометрии), что дана сама окружность.

Представим себе, что построена полуокружность AmB (рис. 336) и полуокружность AnB. Конечно, после этого надо считать, что построена вся окружность $AmBnA$. Точно так же, если построен луч $\overline{AM}$ некоторой прямой (рис. 337), а затем луч $\overline{BN}$ той же прямой, то, естественно, считается, что построена прямая MN, являющаяся соединением этих лучей. Если построены три отрез-

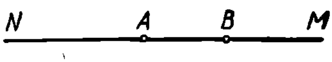


Рис. 337.

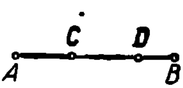


Рис. 338.

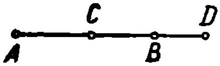


Рис. 339.

ка AB, BC и CA, то иет надобности строить что-либо еще, чтобы построить треугольник ABC. Эти примеры разъясняют смысл постулата:

II. *Если построены две* (или более) *фигуры, то построено и соединение этих фигур.*

Представим себе, что построены два отрезка одной прямой: AB и CD. Естественно, считается возможным ответить на вопрос, принадлежит ли отрезок CD целиком отрезку AB (рис. 338) или иет (рис. 339). Если построены окружность и точка, то при непосредственном рассмотрении чертежа можно ответить на вопрос, лежит ли построенная точка на построенной окружности или нет. Вообще, если построены две фигуры, то считается известным, является ли одна из них частью другой или нет. А так как фигура Φ_1 является частью фигуры Φ_2 в том и только в том случае, когда разность $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ представляет собой пустое множество, то третье требование теории геометрических построений можно выразить в следующей форме:

Рис. 340.

III. *Если построены две фигуры, то можно установить, является ли их разность пустым множеством или нет.*

Пусть A, B, C, D — 4 точки прямой (рис. 340). Допустим, что отрезки AC и BD построены. Тогда мы, конечно, будем считать построенными как отрезок[1] AB, который является разностью отрезков AC и BD, так и отрезок CD, который является разностью отрезков BD и AC. Другой пример: если построена окружность и на ней точка, то мы считаем построенной также ту фигуру, которая останется, если из окружности удалить эту точку, т. е. считаем построенной разность между окружностью и точкой.

IV. *Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность построена.*

Построив две прямые, мы всегда считаем возможным сказать, пересекаются они или нет. Точно так же, если две окружности построены, то мы считаем возможным установить (по чертежу), имеют ли они общие точки. Это же относится к любым двум построенным фигурам. Таким образом:

V. *Если две фигуры построены, то можно установить, является ли их пересечение пустым множеством или нет.*

С точки зрения чертежной практики последнее условие отражает определенные требования к качеству выполненных чертежей. Так, если построены некоторая окружность и точка, то должно быть ясно, лежит точка на окружности или нет. Если построены две окружности, то можно сказать, имеют они общие точки или нет.

Обратимся еще раз к рисунку 340. Пусть известно, что построены отрезки AC и BD. В этом случае мы будем также считать построенным и отрезок BC, который является пересечением этих двух отрезков. Если начерчены две пересекающиеся окружности, то мы будем считать построенной также пару точек их пересечения. Такого рода соглашения выражаются следующим образом:

VI. *Если пересечение двух построенных фигур не пусто, то оно построено.*

В следующих двух основных требованиях говорится о возможностях построения отдельных точек.

VII. *Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.*

VIII. *Можно построить точку, заведомо не принадлежащую построенной фигуре*[2].

В дальнейшем требования I—VIII этого параграфа мы будем называть общими аксиомами конструктивной геометрии.

2. Аксиома VII устанавливает возможность строить точки, принадлежащие уже построенной фигуре.

Аксиома VIII позволяет строить некоторые новые точки, но этим точкам не приписывается никаких определенных свойств, кроме свойства быть новыми, ранее не построенными точками. Для построения новых точек, обладающих некоторыми определенными, указанными свойствами, а также для построений линий пользуются различными *инструментами* геометрических построений.

---

[1] Точнее, полуинтервал.

[2] Если в качестве построенной фигуры не берется вся плоскость.

Для конструктивной геометрии необходимо располагать точным и для математических целей полным описанием того или иного инструмента. Такое описание дается в виде аксиом. Эти аксиомы в абстрактной математической форме выражают те свойства реальных чертежных инструментов, которые используются для геометрических построений.

Наиболее употребительными инструментами геометрических построений являются линейка (односторонняя), циркуль, двусторонняя линейка (с параллельными краями) и некоторые другие.

Переходим к формулировке соответствующих аксиом.

А. Аксиома линейки. Линейка позволяет выполнять следующие геометрические построения:

а) *построить отрезок, соединяющий две построенные точки*;

б) *построить прямую, проходящую через две построенные точки*;

в) *построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку*[1].

Б. Аксиома циркуля. Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:

а) *построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности* (или его концы);

б) *построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг.*

В. Аксиома двусторонней линейки. Двусторонняя линейка позволяет:

а) *выполнить любое из построений, перечисленных в аксиоме А*;

б) *в каждой из полуплоскостей, определяемых построенной прямой, построить прямую, параллельную этой прямой и проходящую от нее на расстоянии h, где h — фиксированный для данной линейки отрезок* (ширина линейки);

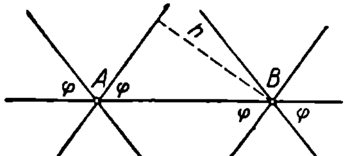


Рис. 341.

в) *если построены две точки A и B, то установить, будет ли AB больше некоторого фиксированного отрезка h* (ширина линейки), *и если $AB>h$, то построить две пары параллельных прямых, проходящих соответственно через точки A и B и отстоящих одна от другой на расстоянии h.*

Реальное содержание пункта в) аксиомы *В* поясняется рисунком 341. Из рисунка видно также, что каждая из упомянутых прямых образует с прямой AB угол $\varphi = \arcsin \frac{h}{AB}$, зависящий только от ширины линейки и расстояния AB.

---

[1] Интересно заметить, что достаточно было бы постулировать только построение в), так как построения а) и б) можно вывести из него с помощью аксиом IV и II.

Г. Аксиома прямого угла. Прямой угол позволяет:

а) *выполнить построения, перечисленные в аксиоме линейки*;

б) *через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой построенной прямой*;

в) *если построены отрезок* AB *и некоторая фигура* Φ, *то установить*, содержит ли фигура точку, из которой этот отрезок виден под прямым углом, и если такая точка существует, то построить такую точку.

Рисунок 342 поясняет смысл пункта в) аксиомы *Г*.

Помимо перечисленных инструментов, для геометрических построений можно пользоваться и другими инструментами: произвольным углом, угольником, линейкой с отметками, парой прямых углов, различными приспособлениями для вычерчивания специальных кривых и др. Примеры таких построений встретятся нам позднее. Пока мы заметим только, что геометрические построения производятся каждый раз с определенными, наперед указанными инструментами, причем каждый набор инструментов характеризуется определенной системой аксиом.

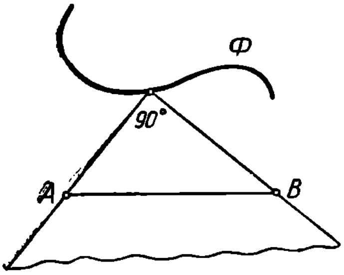


Рис. 342.

Построения, о возможности которых сказано в аксиомах VII—VIII, вместе с построениями, перечисленными в аксиомах тех инструментов, которые избраны для построения, мы в дальнейшем будем называть основными построениями (для данного набора инструментов). В частности, циркуль и линейка позволяют выполнить следующие основные построения:

1. *Построить отрезок, соединяющий две построенные точки* (аксиома *А*, а)).

2. *Построить прямую, проходящую через две построенные точки* (аксиома *А*, б)).

3. *Построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку* (аксиома *А*, в)).

4. *Построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности* (или его концы) (аксиома *Б*, а).

5. *Построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг* (аксиома *Б*, б)).

6. *Построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют* (аксиомы VI—VII).

7. *Построить точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре* (аксиома VII).

8. *Построить точку, заведомо не принадлежащую какой-либо построенной фигуре* (аксиома VIII).

Подобным же образом можно составить список основных построений для любого указанного набора инструментов.

§ 55. ЗАДАЧА НА ПОСТРОЕНИЕ

1. Задача на построение состоит в том, что требуется построить наперед указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая другая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры.

Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется *решением* этой задачи.

Найти решение задачи на построение — значит свести ее к конечному числу основных построений, т. е. указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура будет уже считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии. Перечень допустимых основных построений, а следовательно и ход решения задачи, существенно зависит от того, какие именно инструменты употребляются для построений.

2. В качестве примера рассмотрим следующую задачу: построить середину отрезка, заданного своими концами A и B.

Найдем решение этой задачи с помощью различных инструментов.

1. *Циркулем и линейкой* (рис. 343).

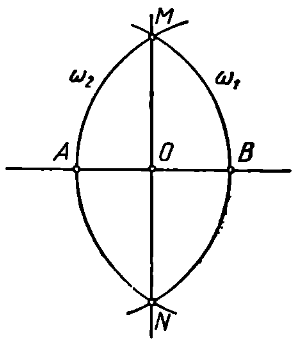


Рис. 343.

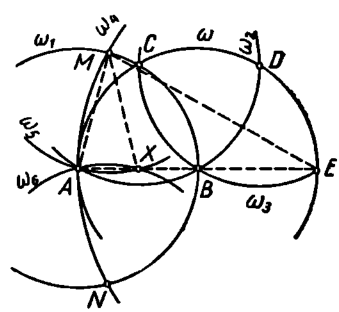


Рис. 344.

Строим последовательно:

1) прямую AB (основное построение 2);

2) окружность $\omega_1(A,\ AB)$ (основное построение 4);

3) окружность $\omega_2(B,\ BA)$;

4) общие точки M и N окружностей ω_1 и ω_2 (основное построение 6);

5) прямую MN (основное построение 2);

6) общую точку O прямых AB и MN (основное построение 6). Легко убедиться, что $AO = BO$, т. е. точка O искомая.

2. *Циркулем* (рис. 344).

Строим последовательно:

1) окружность $\omega(B,\ BA)$ (аксиома $Б$, а);

2) окружность $\omega_1(A,\ AB)$;

3) общую точку C окружностей ω_1 и ω (аксиомы VI, VII);

4) окружность $\omega_2(C, CA)$;

5) общую точку D окружностей ω и ω_2, отличную от точки A;

6) окружность $\omega_3(D, DB)$;

7) общую точку E окружностей ω и ω_3, отличную от C.

Заметим, что точки A, B и E расположены на одной прямой, причем $AE = 2AB$. Строим далее:

8) окружность $\omega_4(E, EA)$;

9) общие точки M и N окружностей ω_1 и ω_4;

10) окружность $\omega_5(M, MA)$;

11) окружность $\omega_6(N, NA)$;

12) общую точку X окружностей ω_5 и ω_6, отличную от A.

Нетрудно усмотреть, что точка X расположена на прямой AB. Кроме того, треугольник AMX подобен треугольнику AEM, так как они равнобедренные и имеют общий угол MAE при основаниях. Поэтому $AX : AM = AM : AE$, или $AX : AB = AB : 2AB$, так что $AX = \frac{1}{2}AB$ и, значит, точка X искомая.

3. Двусторонней линейкой (рис. 345).

Строим последовательно:

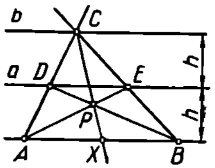


Рис. 345.

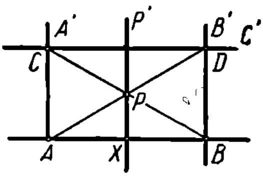


Рис. 346.

1) прямую AB (аксиома В, а));

2) прямую a, параллельную AB (аксиома В, б)) и проходящую на расстоянии h от нее (h — ширина линейки);

3) прямую b, параллельную a, отстоящую от нее на расстоянии h и отличную от прямой AB;

4) точку C на прямой b (аксиома VII);

5) прямые AC и BC;

6) точки $D \equiv a \times AC$ и $E \equiv a \times BC$ (аксиомы VI, VII)[1];

7) прямые AE и BD;

8) точку $P \equiv AE \times BD$;

9) прямую CP;

10) точку $X \equiv CP \times AB$.

Так как DE — средняя линия треугольника ACB, то AE и BD — его медианы, а следовательно, и CP — медиана, так что точка X искомая.

---

[1] Запись $P \equiv a \times b$ означает, что точка P есть пересечение прямых a и b.

4. П р я м ы м у г л о м (рис. 346).

1) Строим прямую AB (аксиома $Г$, а);

2) проводим прямые AA' и BB', перпендикулярные прямой AB (аксиома $Г$, б));

3) выбираем на AA' произвольную точку C, отличную от A (аксиомы IV и VII);

4) через точку C проводим $CC' \perp AC$.

Далее строим последовательно:

5) точку $D \equiv CC' \times BB'$ (аксиома VII);

6) прямые AD и BC;

7) точку $P \equiv AD \times BC$;

8) прямую $PP' \perp AB$;

9) точку $X \equiv PP' \times AB$.

Точка X искомая.

3. Может оказаться, что какая-либо задача на построение имеет несколько различных решений, т. е. существует несколько различных фигур, удовлетворяющих всем условиям задачи. Так, например, к двум данным внешнерасположенным окружностям можно провести, как известно, четыре различные общие касательные.

Р е ш и т ь з а д а ч у на построение — значит найти в с е ее решения.

Последнее определение требует некоторых разъяснений. Фигуры, удовлетворяющие условиям задачи, могут различаться как формой или размерами, так и положением на плоскости. Различия в положении на плоскости принимаются или не принимаются в расчет в зависимости от формулировки самой задачи на построение, а именно в зависимости от того, предусматривает или не предусматривает условие задачи определенное расположение искомой фигуры относительно каких-либо данных фигур. Поясним это примерами.

Рассмотрим следующую простейшую задачу: построить треугольник по двум сторонам и углу между ними. Точный смысл этой задачи состоит в следующем: построить треугольник так, чтобы две стороны его были соответственно равны двум данным отрезкам, а угол между ними был равен данному углу. Здесь искомая фигура (треугольник) связана с данными фигурами (два отрезка и угол) только соотношениями равенства, расположение же искомого треугольника относительно данных фигур безразлично. В этом случае легко построить треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи. Все треугольники, равные треугольнику ABC, также удовлетворяют условиям задачи. Однако нет никакого смысла рассматривать эти треугольники как различные решения данной задачи, ибо они отличаются один от другого только положением на плоскости, о чем в условии задачи ничего не сказано. Будем поэтому считать, что задача имеет единственное решение.

Итак, если условие задачи не предусматривает определенного расположения искомой фигуры относительно данных фигур, то условимся искать только все неравные между собой фигуры, удовлетворяющие условиям задачи. Можно сказать, что задачи этого рода решаются «с точностью до равенства». Это означает, что задача считается решенной, если: 1) построено некоторое число неравных между собой фигур $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, удовлетворяющих условиям задачи, и 2) доказано, что всякая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, равна одной из этих фигур. При этом считается, что задача имеет n различных решений.

Рассмотрим теперь задачу несколько иного содержания: построить треугольник так, чтобы одной его стороной служил данный отрезок BC, другая сторона была равна другому данному отрезку l, а угол между ними был равен данному углу α.

В этом случае условие задачи предусматривает определенное расположение искомого треугольника относительно одной из данных фигур (именно относительно отрезка BC). В связи с этим мы иначе смотрим на вопрос о построении *всех* решений этой задачи. Как видно из рисунка 347, может существовать до четырех треугольников, удовлетворяющих условию этой задачи. Они равны между собой, но по-разному расположены относительно данной фигуры BC. В этом случае полное решение задачи предусматривает построение *всех* этих треугольников. Считается, что задача имеет до четырех различных решений, различающихся своим расположением относительно данной фигуры.

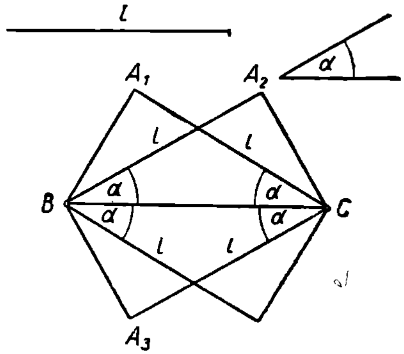


Рис. 347.

Итак, если условие задачи предусматривает определенное расположение искомой фигуры относительно какой-либо данной фигуры, то полное решение состоит в построении всех фигур, удовлетворяющих условию задачи (если такие фигуры существуют в конечном числе). При этом даже равные фигуры, но различно расположенные относительно данных фигур, рассматриваются как различные решения данной задачи.

Встречаются задачи, имеющие бесконечно много решений. Такова, например, задача: построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой. Такого рода задачи называют неопределенными. Конечно, не может идти речь о построении всех решений неопределенной задачи. Когда же считать неопределенную задачу решенной?

Решение неопределенной геометрической задачи ищется в своего рода параметрической форме. Указывается прием построения фигур, удовлетворяющих условиям задачи, причем эти фигуры определяются выбором положения одной из нескольких произвольных точек на некоторых данных или построенных фигурах. Эти точки играют роль *геометрических параметров.* Задача считается решенной, если при всевозможных допустимых положениях произвольных точек возникают все фигуры, удовлетворяющие условиям задачи.

Пример. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B (рис. 348).

Проведем прямую p перпендикулярно отрезку AB через середину этого отрезка. Изберем на прямой p произвольную точку P и построим окружность (P, PA). Она проходит через обе данные точки A и B. Замечаем, что при всевозможных положениях точки P на прямой p возникают все решения данной задачи. После этого считаем, что задача решена.

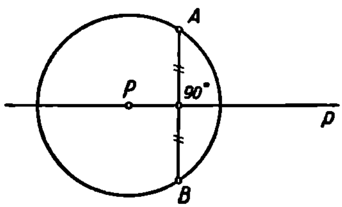


Рис. 348.

Может оказаться, что фигуры, обладающей указанными в задаче свойствами, вовсе не существует. Так, например, нельзя построить окружность, вписанную в данный прямоугольник, если он не является квадратом; нельзя построить общую касательную к двум концентрическим окружностям. Может случиться также, что решение задачи существует, но не может быть найдено данными средствами. Например, нельзя, конечно, построить прямую, соединяющую две данные точки, располагая только циркулем, или провести окружность, проходящую через три данные точки, располагая только линейкой. В дальнейшем нам встретятся более содержательные примеры этого рода. Так, в § 63 будет показано, что задача о построении перпендикуляра к данной прямой неразрешима, если пользоваться только односторонней линейкой. Во всех этих случаях решить задачу на построение — значит доказать, что искомая фигура не существует или соответственно что она не может быть построена данными средствами.

Иногда задача не имеет решений потому, что на искомую фигуру наложено слишком много условий. Например, нельзя, вообще говоря, построить окружность, проходящую через четыре заданные точки, или построить треугольник, зная три его стороны и один из углов. Задачи такого рода называются переопределенными.

Для ориентировки полезно знать, сколько независимых условий обычно достаточно для определения искомой фигуры. Известно, что для построения треугольника (если по условию задачи его положение не фиксировано) достаточно знать три условия, например две стороны и угол. Можно показать, что для построения произвольного n-угольника нужно знать $2n—3$ условий (см. об этом, например, [41], стр. 25—26). Так, для построения четырехугольника достаточно задать пять условий; например, указать, что он представляет трапецию, и задать две его стороны и две диагонали.

Условие задачи часто дает известный простор в выборе данных. Так, например, если требуется построить треугольник по трем сторонам, то данными являются три отрезка, которые могут быть произвольными как по величине, так и по положению. Или если требуется провести касательную к данной окружности из данной точки, то данная окружность может быть любой окружностью на плоскости, причем данная точка может оказаться внутри, вне или на данной окружности. Задача в такой формулировке может считаться полностью решенной лишь в том случае, если она решена для всех возможных предположений относительно выбора данных. Может оказаться, что при одном выборе данных задача решается совершенно иначе, чем при другом их выборе, так что приходится рассматривать ряд отдельных случаев и давать решение задачи для каждого из них. Например, задача о проведении касательной к окружности через данную точку решается (циркулем и линейкой) по-разному в трех возможных случаях:

1-й случай. Точка задана внутри окружности. Задача не имеет решения.

2-й случай. Точка расположена на данной окружности. Задача имеет единственное решение. Построение общеизвестно: достаточно провести радиус окружности в данную точку и провести через точку прямую, перпендикулярную к этому радиусу.

3-й случай. Точка расположена вне данной окружности. Задача имеет два различных решения. Соответствующее построение рассматривается в школьном курсе геометрии (см., например, [20], п. 128, 2).

В ближайших параграфах излагается теория геометрических построений, производимых циркулем и линейкой, что особенно важно для учителя средней школы. Изучение построений с этими инструментами дает представление об основных идеях и методах конструктивной геометрии вообще.

Некоторые сведения о построениях с другими инструментами приводятся в конце главы.

4. Рассмотренные выше примеры геометрических построений показывают, что непосредственное расчленение решения на основные построения даже в простейших задачах приводит к большому числу логических «шагов». В случае сколько-нибудь сложных задач это может привести к тому, что за общей логической структурой решения уследить будет трудно. Поэтому в практике решения геометрических задач на построение поступают несколько иначе.

Если найдено решение какой-либо задачи, то в дальнейшем разрешается пользоваться этим решением в целом, т. е. не расчленяя его на основные построения.

Существует ряд простейших геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются обычно в первых главах школьного курса геометрии. Будем называть их *элементарными* геометрическими *задачами* на построение. Список элементарных задач является, конечно, условным. К числу элементарных задач относят обычно следующие:

1. Деление данного отрезка пополам.
2. Деление данного угла пополам.
3. Построение на данной прямой отрезка, равного данному.
4. Построение угла, равного данному.
5. Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.
6. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.
7. Деление отрезка в данном отношении.
8. Построение треугольника по трем данным сторонам.
9. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.
10. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.
11. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Первая из этих задач рассмотрена нами подробно в предыдущем параграфе. По этому образцу читателю следует составить для себя подробные решения остальных элементарных задач с помощью циркуля и линейки. В дальнейшем мы будем пользоваться этими решениями без дополнительных разъяснений.

§ 56. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

1. В § 55 мы выяснили, что значит «решить задачу на построение». С математической точки зрения для решения задачи достаточно: 1) установить конечное число случаев, исчерпывающих все возможности в выборе данных; 2) для каждого случая дать ответ на вопрос, имеет ли задача решения и сколько этих решений; 3) для каждого случая, когда задача имеет решения, дать способ нахождения (с помощью данных инструментов) каждого из возможных решений или установить, что оно не может быть получено данными средствами. Но в учебных условиях при решении каждой сколько-нибудь сложной задачи на построение возникает вопрос о том, *как* нужно *рассуждать*, чтобы разыскать способ решения задачи, чтобы получить все решения, чтобы выяснить условия разрешимости и т. п. Решение этих вопросов облегчается, если придерживаться определенного плана, *схемы* рассуждений.

Схема рассуждения может быть избрана различными способами, и вопрос о выборе той или иной схемы является вопросом чисто методическим. Наиболее употребительна в учебных условиях схема, состоящая из четырех этапов, именуемых соответственно анализом, построением, доказательством и исследованием. Учитывая известную организующую роль этой «классической» схемы и ее широкое распространение в школьной практике, поясним ее содержание некоторыми общими соображениями и примерами и будем в дальнейшем ею пользоваться. Заметим только, что эту схему не следует рассматривать как безусловно необходимую и неизменную. Не всегда целесообразно строго расчленять решение задачи на отдельные этапы и в точности осуществлять их в указанном порядке. Допустимы и часто естественны более или менее существенные отклонения от указанной схемы в соответствии с конкретными особенностями той или иной задачи на построение.

2. Анализ мы понимаем как поиск способа решения задачи на построение. На этом этапе должны быть подмечены такие зависимости между данными фигурами и искомой фигурой, которые позволили бы в дальнейшем построить эту искомую фигуру (если мы знаем, как строить искомую фигуру, то никакой анализ уже не нужен).

Анализ — подготовительный, предварительный этап решения задачи на построение.

Чтобы облегчить себе поиск связей между искомой фигурой и данными фигурами, обычно оказывается выгодным иметь перед глазами вспомогательный чертеж, чертеж-набросок, изображающий данные и искомые фигуры примерно в том расположении, которое предусмотрено условием задачи. Этот чертеж можно выполнить от руки, на глаз. Это — проект чертежа, который должен образоваться, когда задача уже будет решена.

На вспомогательном чертеже следует выделить данные элементы и важнейшие искомые элементы. Практически часто удобнее начинать построение вспомогательного чертежа не с данной фигуры, а с примерного изображения искомой фигуры, пристраивая к ней данные так, чтобы они находились в отношениях, указанных в условии задачи. Например, если нужно построить треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной вершины, то при анализе удобнее сначала изобразить произвольный треугольник, а затем уже проводить в нем указанные в задаче линии.

Если вспомогательный чертеж не подсказывает способа построения искомой фигуры, то пытаются обнаружить какую-либо часть искомой фигуры или вообще некоторую фигуру, которая может быть построена и которой затем можно воспользоваться для построения искомой фигуры. В общем случае рассуждение ведется следующим образом. Подмечают, что построение искомой фигуры Φ сводится к построению некоторой другой фигуры Φ_1. Затем подмечают, что построение фигуры Φ_1 сводится к построению какой-то фигуры Φ_2, и т. д. После конечного числа шагов можно прийти к некоторой фигуре Φ_n, построение которой известно.

Пусть, например, требуется построить треугольник по основанию и по медиане и высоте, проведенным к этому основанию. Рассматривая вспомогательный чертеж (рис. 349), замечаем, что треугольник ABC можно легко построить, если будет построен треугольник BDE; тогда останется только отложить по обе стороны от точки E на прямой DE отрезки, равные половине данного основания. Но треугольник BDE прямоугольный и строится по гипотенузе m и катету h (§ 55, элементарная задача 11).

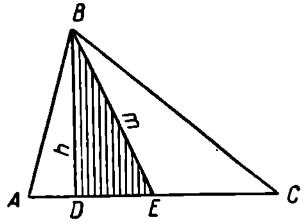


Рис. 349.

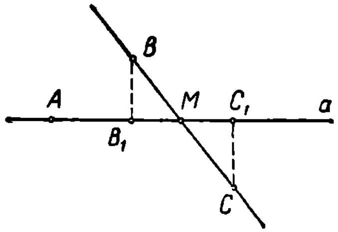


Рис. 350.

Полезно учесть следующие частные замечания, помогающие при проведении анализа:

1) Если на вспомогательном чертеже не удается непосредственно заметить необходимые для решения связи между данными и искомыми элементами, то целесообразно ввести в чертеж вспомогательные фигуры: соединить уже имеющиеся точки прямыми, отметить точки пересечения имеющихся линий, продолжить некоторые отрезки и т. д. Иногда бывает полезно проводить параллели или перпендикуляры к уже имеющимся прямым.

Пусть, например, требуется построить прямую, проходящую через данную точку A и равноудаленную от двух данных точек B и C. Построение чертежа-наброска удобно начать с искомой фигуры: строим сначала прямую a (рис. 350), на ней выбираем точку A и на равных расстояниях от прямой a выбираем (например, по разные стороны от прямой) точки B и C. После этого еще не возникают на чертеже такие связи, которые позволили бы решить задачу. Проведем к прямой a перпендикуляры BB_1 и CC_1, построим отрезок BC и отметим точку M пересечения отрезка BC с прямой a. Легко заметить, что M — середина отрезка BC, а отсюда уже ясен способ построения прямой, удовлетворяющей условию задачи.

2) Если по условию задачи дана сумма или разность отрезков или углов, то эти величины следует ввести в чертеж, т. е. следует изобразить их на чертеже-наброске, если их еще нет на нем.

Пусть, например, требуется построить прямоугольный треугольник по острому углу и сумме катетов. Изобразим какой-либо прямоугольный треугольник ABC (рис. 351). По условию даны $\angle\alpha$ и отрезок m. Искомый треугольник ABC должен удовлетворять условиям: $\angle A=\alpha$, $AC+CB=m$, $\angle C=90°$. Чтобы ввести в чертеж данный отрезок m, откладываем на продолжении стороны AC отрезок $CD=BC$; тогда $AD=m$. Легко построить треугольник ADB, так как в нем известны сторона $AD=m$ и два угла: $\angle A=\alpha$ и $\angle D=45°$ (элементарная задача 9). После построения треугольника ABD построение искомого треугольника сводится к элементарной задаче 6.

3) В процессе проведения анализа бывает полезно вспомнить теоремы и ранее решенные задачи, в которых встречаются зависимости между элементами, о которых говорится в условии рассматриваемой задачи.

4) Проводя анализ на основании изучения некоторого чертежа-наброска, мы невольно связываем свои рассуждения в известной мере с этим чертежом. Так, в примере, иллюстрирующем пункт 1), мы избрали точки B и C по разные стороны от прямой a, в то время как можно было избрать их и по одну сторону от этой прямой. Тот способ решения, к которому мы приходим на основании анализа, может поэтому оказаться пригодным лишь для некоторых частных случаев. Чтобы получаемый нами способ решения был пригоден для возможно более широкого выбора данных, желательно изображать искомую фигуру в возможно более общем виде. На-

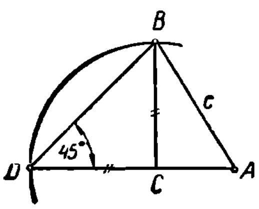


Рис. 351.

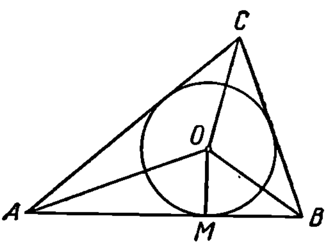


Рис. 352.

пример, искомый треугольник, если в условии задачи нет специального указания о его форме, надо изображать как разносторонний, четырехугольник — как неправильный и т. п. Чем более общий случай мы разберем при анализе, тем проще будет провести в дальнейшем полное решение задачи.

Рассмотрим еще один пример анализа. Требуется вписать окружность в данный треугольник. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 352). Чтобы вписать в него окружность, надо определить положение ее центра и найти величину радиуса. Представим себе, что O — центр вписанной окружности, а OM — радиус, проведенный в какую-либо из точек касания окружности к сторонам треугольника (например, в точку касания окружности к стороне AB). Тогда отрезок OM перпендикулярен к прямой AB (см. [20], п. 113, 2). Поэтому OM — расстояние центра вписанной окружности от стороны треугольника AB. Так как все радиусы окружности равны, то центр окружности одинаково удален от всех сторон треугольника и, следовательно, прямые OA, OB и OC служат биссектрисами (внутренних) углов треугольника ABC. Этих соображений, очевидно, достаточно для построения центра и определения радиуса искомой окружности.

3. Построение состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений (или ранее решенных задач), которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена.

Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого его шага с помощью инструментов, принятых для построения.

В качестве примера обратимся опять к задаче о построении окружности, вписанной в данный треугольник ABC. Как показывает проведенный выше анализ этой задачи, для построения искомой окружности нужно последовательно построить (см. рис. 352):

1) биссектрисы каких-либо двух внутренних углов данного треугольника (2-я элементарная задача);

2) точку их пересечения O (§ 54, основное построение 6);

3) прямую, проходящую через точку O перпендикулярно прямой AB (6-я элементарная задача);

4) основание M проведенного перпендикуляра (основное построение 6, § 54);

5) окружность $(O,\ OM)$ (основное построение 4, § 54).

4. Доказательство имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

Так, чтобы провести доказательство правильности проведенного выше построения окружности, вписанной в данный треугольник, надо установить, что построенная нами окружность $(O,\ OM)$ действительно коснется всех сторон треугольника ABC. Для этого прежде всего заметим, что прямая AB касается проведенной окружности, так как эта прямая перпендикулярна к радиусу OM. Вместе с этим ясно, что радиус окружности равен расстоянию ее центра от стороны AB данного треугольника ABC. Далее заметим, что центр окружности O одинаково удален от всех сторон треугольника, так как лежит на пересечении биссектрис углов треугольника. Следовательно, расстояние центра окружности от стороны AC или от стороны BC также равно радиусу построенной окружности, так что если провести через O перпендикуляры к сторонам треугольника AC и BC, то основания этих перпендикуляров (точки N и P на рис. 353) расположатся на той же окружности. Таким образом, каждая из прямых AC и BC перпендикулярна к соответствующему радиусу в конце его, лежащем на окружности, и поэтому каждая из этих прямых касается построенной окружности.

Доказательство обычно проводится в предположении, что каждый шаг построения может быть выполнен.

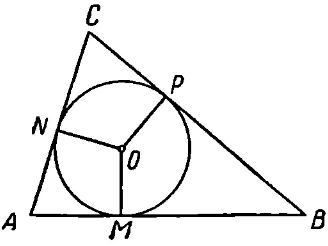


Рис. 353.

5. Исследование. При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно еще выяснить следующие вопросы: 1) всегда ли (т. е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построение избранным способом; 2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить; 3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных? Рассмотрение всех этих вопросов и составляет содержание исследования. Таким образом, исследование имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений.

Нередко школьники и даже учителя проводят исследование, в известной мере произвольно выбирая те или иные случаи, причем неясно, почему рассматриваются именно такие, а не какие-либо иные случаи. Остается неясным также, все ли возможные случаи рассмотрены. При исследовании решения сколько-нибудь сложной задачи такой подход может привести к потере решений, к тому, что некоторые случаи вовсе не будут рассмотрены. Практически в большинстве случаев удается достигнуть необходимой полноты исследования, если проводить это исследование по ходу построения. Сущность этого приема состоит в том, чтобы перебрать последовательно все шаги, из которых слагается построение, и относительно каждого шага установить, всегда ли указанное на этом шаге построение выполнимо, а если выполнимо, то однозначно ли.

В итоге таких рассуждений решается вопрос о возможности и однозначности построения искомой фигуры *данным способом*. Но остается еще открытым вопрос: не возникнут ли новые решения, если изменить как-либо способ построения? Иногда удается доказать, что всякое решение данной задачи совпадает с одним из уже полученных решений. Если же это не удается, то можно предположить, что задача имеет другие решения, которые могут быть найдены другими способами. В этих случаях надо тщательно проверить, нет ли каких-либо иных возможных случаев расположения данных или искомых фигур, которые не были предусмотрены ранее проведенным анализом.

Для иллюстрации приведенных здесь соображений обратимся еще раз к рассмотренному выше (стр. 278) примеру: построить прямую, проходящую через данную точку A и равноудаленную от двух данных точек B и C.

Согласно сказанному на странице 278, построение следует провести в таком порядке: 1-й шаг — построение отрезка BC; 2-й шаг — построение середины M отрезка BC; 3-й шаг — построение прямой AM, которая и является искомой.

Исследование можно провести примерно следующим образом. Первый шаг всегда выполним, притом однозначно: любые две различные точки можно соединить отрезком и только единственным. Однозначно выполним и второй шаг построения. Третий шаг построения всегда выполним: всегда можно провести прямую, соединяющую две данные точки. Но через две точки можно провести единственную прямую лишь в том случае, если эти точки различны; когда точки A и M совпадают, то через эти две точки проходит бесконечно много прямых. Итак, при нашем способе построения мы получим бесконечно много решений, если точка A служит серединой отрезка BC, и единственное решение во всех остальных случаях.

Но нельзя еще утверждать, что этим исчерпываются все возможные решения. В ходе анализа был рассмотрен только случай, когда данные точки располагаются по разные стороны от искомой прямой.

В действительности же точки B и C могут расположиться и по одну сторону искомой прямой или на самой прямой. В первом из этих случаев искомая прямая должна быть, очевидно, параллельной прямой BC, а во втором случае — совпадать с прямой BC. Таким образом, помимо прямой, проходящей через точку A и середину отрезка BC, решением является также прямая, проведенная через точку A параллельно прямой BC.

Докажем теперь, что задача не имеет других решений. Пусть прямая a' не проходит через середину отрезка BC и не параллельна ему (рис. 354). Обозначим через D точку ее пересечения с прямой BC, а через BB' и CC' — перпендикуляры, проведенные из точек B и C к прямой a'. Так как $\triangle BB'D \backsim \triangle CC'D$, то $\frac{BB'}{CC'} = \frac{BD}{CD}$. Но из того, что прямая a' не проходит через середину отрезка BC, следует, что $BD \neq CD$, и поэтому $BB' \neq CC'$, т. е. прямая a' не может удовлетворять условию задачи.

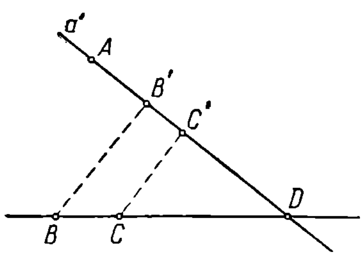


Рис. 354.

Проведенное исследование показывает, что задача имеет бесконечно много решений, если точка A является серединой отрезка BC, и имеет в точности два решения, если точка A не лежит на прямой BC. Если же A — произвольная точка прямой BC, не являющаяся серединой отрезка BC, то задача имеет одно решение.

6. Приведем еще некоторые примеры.

Задача 1. Построить треугольник по основанию и двум медианам, проведенным к боковым сторонам.

Анализ. Допустим, что треугольник ABC (рис. 355) искомый, AB — основание, AM_1 и BM_2 — медианы, проведенные к боковым сторонам, P — точка пересечения медиан. По условию заданы отрезки c, m_1 и m_2 и требуется, чтобы $AB = c$, $AM_1 = m_1$, $BM_2 = m_2$. Построение треугольника ABC сводится к построению трех точек — его вершин. Так как построение основания (т. е. отрезка AB) не вызывает затруднений, то задача сводится к построению вершины C. $C \equiv AM_2 \times BM_1$, так что нужно строить точки M_1 и M_2.

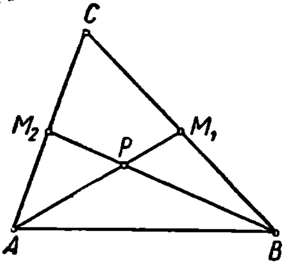


Рис. 355.

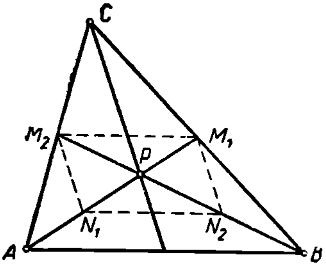


Рис. 356.

Точки M_1 и M_2 лежат соответственно на лучах AP и BP, причем точка M_1 удалена от A на расстояние m_1, а точка M_2 удалена от B на расстояние m_2. Поэтому задача сводится к построению точки P. Точку P можно построить как третью вершину треугольника ABP, вершины которого A и B заданы. Так как $AP = \frac{2}{3} m_1$, $BP = \frac{2}{3} m_2$, то все стороны треугольника ABP известны.

Построение. Строим последовательно:

1) отрезок AB, равный данному отрезку c (элементарная задача 3);

2) отрезок $r_1 = \frac{2}{3} m_1$ (элементарные задачи 7 и 3);

3) отрезок $r_2 = \frac{2}{3} m_2$;

4) треугольник ABP по трем сторонам: c, r_1 и r_2 (элементарная задача 8);

5) лучи AP и BP (основное построение 3, § 54);

6) точку M_1 на луче AP так, чтобы $AM_1 \equiv m_1$ (элементарная задача 3);

7) на луче BP точку M_2 так, чтобы $BM_2 \equiv m_2$;

8) точку $C \equiv AM_2 \times BM_1$.

Треугольник ABC искомый.

Доказательство. Если N_1 — середина AP, N_2 — середина BP, то четырехугольник $M_1M_2N_1N_2$ — параллелограмм, так как его диагонали взаимно делятся пополам (рис. 356). Следовательно, отрезки M_1M_2 и N_1N_2 равны и параллельны. А так как N_1N_2 — средняя линия $\triangle ABP$, то $M_1M_2 \parallel AB$ и $M_1M_2 = \frac{1}{2} AB$. Отсюда можно вывести, что отрезок M_1M_2 служит средней линией треугольника ABC, так что AM_1 и BM_2 действительно медианы этого треугольника.

Исследование. Построения 1), 2) и 3) всегда выполнимы. Для выполнимости построения 4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2)$.

Построения 5), 6) и 7) всегда выполнимы. Покажем, что построение 8) также всегда можно осуществить.

Прямые AM_2 и BM_1 всегда пересекутся, притом в ту же сторону от прямой AB, где расположена точка P. В самом деле, если бы AM_2 была параллельна BM_1, то параллельные отрезки AB и M_2M_1 между параллельными прямыми AM_2 и BM_1 были бы равны, вопреки тому, что $M_2M_1 = \frac{1}{2}AB$ (см. доказательство). А если бы прямые AM_2 и BM_1 пересекались по другую сторону от AB, то отрезок M_1M_2 был бы больше отрезка AB.

Итак, задача имеет решение при условии

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2).$$

При нашем способе построения решение единственно, так как каждый шаг построения выполняется однозначно (с точностью до равенства).

Для полного исследования нужно еще показать, что ни при каком другом способе построения нельзя получить треугольник, удовлетворяющий всем условиям задачи, но не равный построенному нами треугольнику. Это равносильно предложению: если основание и «боковые» медианы одного треугольника соответственно равны основанию и «боковым» медианам другого треугольника, то такие треугольники равны. Доказательство этой несложной теоремы мы опускаем.

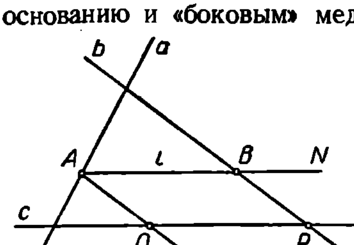


Рис. 357.

Задача 2. Две прямые a и b пересечены третьей прямой c. Построить отрезок, равный данному отрезку l, так, чтобы он был параллелен прямой c и концы его располагались на прямых a и b.

Анализ. Пусть AB (рис. 357) искомый отрезок, т. е.

$$AB = l, \quad AB \parallel c, \quad A \in a^1, \quad B \in b.$$

Для выяснения связей между данными и искомыми придется ввести некоторые вспомогательные точки и линии.

Пусть $P \equiv c \times b$. Проведем $AM \parallel b$, и пусть $Q \equiv AM \times c$. Тогда $PQ = AB = l$, так как четырехугольник $ABPQ$ — параллелограмм.

[1] Символ $A \in a$ означает, что точка A принадлежит прямой a.

Для построения отрезка AB достаточно определить положение точки A, что сводится к построению точки Q. В свою очередь, построение точки Q не вызывает затруднений.

Построение. 1) Строим точку $P \equiv b \times c$ (основное построение 6, § 54);

2) На прямой c откладываем от точки P отрезок $PQ \equiv l$ (элементарная задача 3).

Далее строим последовательно:

3) прямую $QM \parallel b$ (элементарная задача 5);

4) точку $A \equiv QM \times a$ (основное построение 6, § 54);

5) прямую $AN \parallel c$ (элементарная задача 5);

6) Точку $B \equiv AN \times b$.

AB — искомый отрезок.

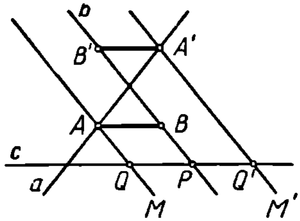


Рис. 358.

Доказательство. Из построения видно, что $A \in a$. $AB \parallel c$ и $B \in b$. Кроме того, $AB = PQ = l$, как противоположные стороны параллелограмма.

Исследование. Точка P существует, так как, по условию, прямая c пересекает прямую b. Поэтому построение 1) всегда возможно. Построение 2) всегда возможно и дает две точки Q и Q' (рис. 358).

Построение 3) всегда однозначно выполнимо для каждой из точек Q и Q'.

Возможны три случая:

α) QM (одновременно $Q'M'$) пересекает a (рис. 358);

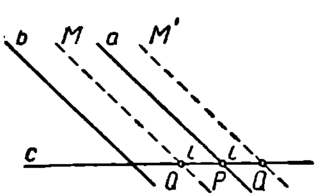


Рис. 359.

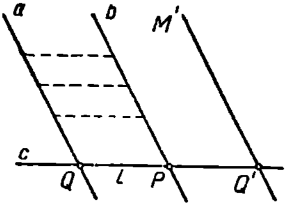


Рис. 360.

β) QM (одновременно $Q'M'$) параллельна a (рис. 359);

γ) QM или $Q'M'$ совпадает с a (рис. 360).

Случай α) имеет место, если b пересекает a. При этом построения 4)—6) однозначно выполнимы для каждой из точек Q и Q'. Получаем два решения задачи.

Случай β) имеет место, когда $a \parallel b$, причем прямые a и b отсекают на прямой c отрезок, не равный l. В этом случае построение 4) невыполнимо, мы не получим ни одного решения.

В случае γ) (рис. 360), т. е. когда $a \parallel b$ и отрезок, отсекаемый этими прямыми на прямой c, равен l, задача имеет бесконечное множество решений: искомый отрезок можно провести через любую точку прямой a.

Для полноты исследования надо еще показать, что при всяком другом способе построения не могут возникнуть какие-либо новые решения. В случае пересечения прямых a и b это сводится к предложению: все отрезки, отсекаемые сторонами угла на параллельных прямых, различны по величине. Ясно, что в случае параллельности прямых a и b не могут возникнуть решения, отличные от полученных нами.

7. К решению задач средней или повышенной трудности часто привлекают некоторые специальные методы.

Три метода являются основными при решении геометрических задач на построение:

а) метод пересечения фигур,

б) метод геометрических преобразований

и в) алгебраический метод.

В ближайших параграфах мы рассмотрим каждый из этих методов.

§ 57. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ФИГУР

Сущность этого метода, называемого также методом геометрических мест, заключается в следующем. Решение задачи на построение сводят к разысканию некоторой точки, подчиненной двум независимым условиям. Отбрасываем одно из этих условий и ищем множество всех точек, удовлетворяющих второму условию. Пусть это будет фигура Φ_2. Отбрасываем затем второе условие и ищем множество всех точек, удовлетворяющих первому условию. Пусть это будет фигура Φ_1. Ясно, что обоим условиям удовлетворяет каждая точка пересечения фигур Φ_1 и Φ_2, а всякая точка, не принадлежащая пересечению этих фигур, не удовлетворяет хотя бы одному из этих условий. Каждая точка фигуры $\Phi_1 \cap \Phi_2$ дает возможность найти некоторое решение задачи.

Пример 1. На диаметре круглого бильярдного стола были расположены (по разные стороны от центра и на неравных от него расстояниях) два шара A и B. Шар B ударили так, что после одного отражения от борта стола он попал в шар A. Восстановить траекторию шара B (считая, что удар не был направлен по диаметру BA).

Пусть C (рис. 361) — точка, в которой шар ударился о борт стола, M — центр стола. Согласно закону отражения

$$\angle ACM = \angle BCM,$$

так что CM — биссектриса угла ACB.

Таким образом, задача сводится к следующему геометрическому построению.

Построить треугольник, зная биссектрису b одного из углов и отрезки p и q $(p > q)$, на которые эта биссектриса делит противолежащую сторону.

Анализ. Пусть $\triangle ABC$ искомый (рис. 362), CM — данная биссектриса, AM и BM — данные отрезки p и q. Вершины A и B искомого треугольника легко построить. Значит, задача сводится

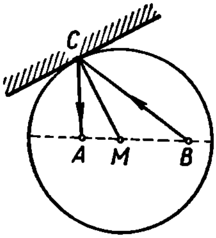


Рис. 361.

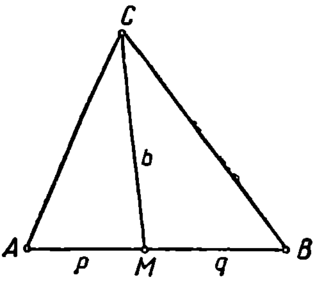


Рис. 362.

к построению вершины C. Точка C должна удовлетворять двум условиям: 1) она должна находиться на расстоянии b от точки M; 2) отношение расстояний этой точки от вершин A и B должно быть равно $p : q$, т. е.

$$CA : CB = p : q.$$

Построение. На произвольной прямой (рис. 363) выбираем три точки A, M и B так, чтобы $AM = p$, $MB = q$ и отрезки AM и BM не имели общих внутренних точек. Строим фигуру, состоящую из всех точек, удовлетворяющих условию 1); это окружность ω_1 (M, b). Строим далее фигуру, состоящую из всех точек, удовлетворяющих условию 2); это некоторая определенная окружность (окружность Аполлония) ω_2.

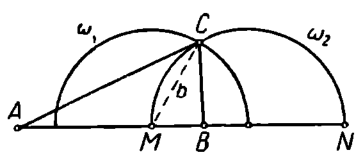


Рис. 363.

Отмечаем какую-либо точку C пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Треугольник ABC искомый.

Доказательство очевидно из рассуждений, приведенных при анализе.

Исследование. Пусть MN — диаметр окружности ω_2. Задача имеет решение лишь тогда, когда $b < MN$. Но

$$MN = MB + BN; \quad \frac{BN}{p+q+BN} = \frac{q}{p}; \quad \frac{BN}{p+q} = \frac{q}{p-q};$$

$$BN = \frac{q(p+q)}{p-q}.$$

Следовательно, $\quad MN = q\frac{p+q}{p-q} + q = q \cdot \frac{2p}{p-q}.$

Таким образом, задача имеет решение, если $b < \frac{2pq}{p-q}$. В этом случае решение единственное, так как окружности ω_1 и ω_2 пересекаются при этом в двух точках C_1 и C_2, симметричных относительно прямой AB, и поэтому треугольники AC_1B и AC_2B равны. Если $b \geqslant \frac{2pq}{p-q}$, то задача не имеет решений.

Пример 2. Построить такую окружность, чтобы касательные к ней из трех данных точек A, B, C были равны соответственно трем данным отрезкам a, b, c.

Анализ. Пусть $\omega(O, r)$ — искомая окружность (рис. 364), AA_1 — касательная к ω, A_1 — точка касания. Тогда $AA_1 = a$ и $A_1O \perp A_1A$. Поэтому точка A_1 лежит на окружности $\omega_1(A, a)$ и касательная к ω_1 из точки O равна r. Аналогично получим, что касательные из точки O к $\omega_2(B, b)$ и к $\omega_3(C, c)$ также должны быть равны r. Итак, касательные из точки O к трем окружностям ω_1, ω_2 и ω_3 должны быть равны между собой. Следовательно, точка O является радикальным центром этих окружностей.

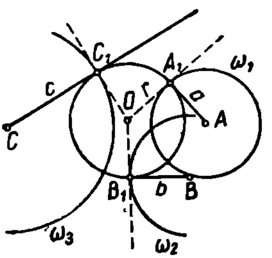


Рис. 364.

Построение. Строим последовательно:

1) три окружности: ω_1 (A, a), ω_2 (B, b), ω_3 (C, c);

2) радикальный центр этих окружностей O;

3) касательную из точки O к окружности ω_1;

4) точку касания A_1;

5) окружность $\omega(O, r)$, где $r \equiv OA_1$. Эта окружность искомая.

Доказательство. Если приведенное построение выполнимо, то $C^0_{\omega_1} = OA_1^2 = r^2 > 0$. Но $C^0_{\omega_1} = C^0_{\omega_2} = C^0_{\omega_3}$, так что $C^0_{\omega_2} > 0$, $C^0_{\omega_3} > 0$ и точка O лежит вне окружностей ω_2 и ω_3. Поэтому из точки O можно провести касательные к окружностям ω_2 и ω_3. Обозначим эти касательные через OB_1 и OC_1. Тогда $C^0_{\omega_2} = OB_1^2$, $C^0_{\omega_3} = OC_1^2$, так что $OB_1^2 = OC_1^2 = OA_1^2$, т. е. $OB_1 = OC_1 = OA_1 = r$, вследствие чего точки B_1 и C_1 лежат на окружности ω. Так как OA_1 касается окружности ω_1, то $OA_1 \perp AA_1$. Следовательно, AA_1 касается окружности $\omega(O, r)$, причем $AA_1 = a$, как радиус окружности ω_1. Аналогично можно доказать, что BB_1 и CC_1 касаются окружности $\omega(O, r)$, причем $BB_1 = b$, $CC' = c$, так что ω — действительно искомая окружность.

Исследование опустим.

§ 58. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Сущность метода геометрических преобразований состоит в том, что при решении задачи, и прежде всего на первом этапе — в процессе анализа, наряду с данными и искомыми фигурами рассматриваем другие фигуры, которые получают из данных или

искомых фигур или их частей с помощью того или иного геометрического преобразования. В зависимости от того, какое именно геометрическое преобразование выбрано, говорят о той или иной разновидности метода геометрических преобразований: о методе переноса, о методе гомотетии, методе инверсии и т. п.

Рассмотрим теперь некоторые типичные ситуации, в которых обычно удобно применить метод геометрических преобразований.

Ситуация I. Для решения некоторых задач выгодно сблизить данные или искомые фигуры. Таковы, например, задачи на построение многоугольников, не являющихся треугольниками. Такое сближение позволяет часто свести задачу к построению некоторого треугольника, у которого известны три элемента. Сближение данных фигур чаще всего удобно осуществить посредством параллельного переноса.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Построить выпуклый четырехугольник, зная три его угла и две противоположные стороны.

Подробнее: даны два отрезка a и b и три угла α, β, δ. Требуется построить четырехугольник $ABCD$ так, чтобы $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle D = \delta$, $AD = a$, $CB = b$. Предполагается, что $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$, $0° < \delta < 180°$.

Анализ. Допустим, что $ABCD$ (рис. 365) — искомый четырехугольник. Перенесем сторону BC на вектор $\overrightarrow{BA}$, и пусть отрезок BC займет после переноса положение AE. Тогда в $\triangle AED$ известны:

$$AD = a, \quad AE = b, \quad \angle DAE = \angle BAD - \angle BAE = \angle A - (180° - \angle B) = \alpha + \beta - 180°.$$

По этим данным $\triangle AED$ может быть построен.

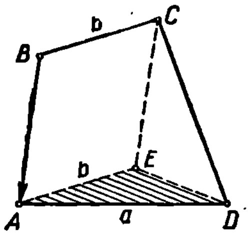


Рис. 365.

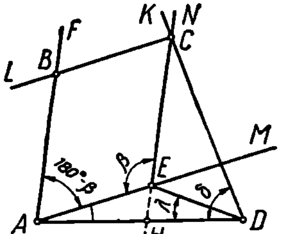


Рис. 366.

Построение. 1) На произвольной прямой строим отрезок $AD = a$ (рис. 366). 2) Через точку A проводим луч AM под углом $\alpha + \beta - 180°$ к лучу AD. 3) Откладываем на луче AM отрезок $AE = b$. 4) Строим луч EN, образующий с EA угол β и расположенный с точкой D по разные стороны от прямой AM. 5) Строим луч DK так, чтобы $\angle ADK$ был равен δ и чтобы луч DK располагался по ту же сторону прямой DE, что и луч EN. 6) Отмечаем точку C пересечения лучей EN и DK — третью вершину четырехугольника. 7) Четвертая вершина B получается в пересечении прямой AF, параллельной CE, с прямой CL, параллельной AE.

Доказательство. $\angle BAD = \angle BAE + \angle DAE = (180° - \beta) + (\alpha + \beta - 180°) = \alpha$.

$\angle ABC = \angle CEA$, как углы, стороны которых соответственно параллельны и противоположно направлены. $\angle CEA = \beta$ по построению. $\angle ADC = \delta$ по построению. Отрезок $AD = a$ по построению. $BC = AE$, как отрезки параллельных между параллельными. Но $AE = b$, а значит, и $BC = b$. Исследование опускаем (оно приведено в [4]).

Пример 2. По разные стороны от канала расположены пункты A и B. Где следует выбрать место для моста, чтобы путь от A до B был кратчайшим?

Берега канала мыслятся в виде двух параллельных прямых a и b (рис. 367), а мост — в виде отрезка MN, перпендикулярного к этим прямым.

Задача заключается в том, чтобы выбрать такое положение точки M на прямой a (или точки N на прямой b), чтобы ломаная $AMNB$ имела наименьшую длину.

Так как длина отрезка MN постоянна, то условие задачи равносильно требованию, чтобы сумма отрезков AM и BN была наименьшей.

Чтобы связать отрезки AM и BN, перенесем отрезок BN на вектор $\overrightarrow{NM}$. Тогда точка N перейдет в точку M, а точка B — в некоторую точку B', которая легко может быть построена. Так как

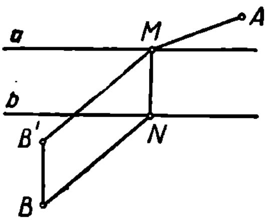


Рис. 367.

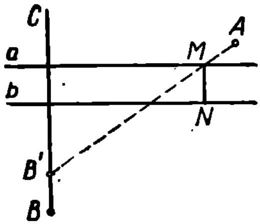


Рис. 368.

$BN = B'M$, то нужно найти такое положение точки M, при котором ломаная $B'MA$, концы которой известны, имела бы наименьшую длину. Ясно, что это будет в случае, когда точки B', M и A расположатся на одной прямой.

Построение показано на рисунке 368. Проводим прямую BC перпендикулярно прямой a и откладываем на ней отрезок BB', равный ширине канала. Строим прямую AB'. Прямая AB' пересекает прямую a в искомой точке M.

Задача всегда имеет решение, притом единственное.

Ситуация II. Задачу можно свести к построению некоторой точки, которая, как удается подметить, является общей для какой-то данной линии L_1 и другой линии L_2', получаемой из (другой) данной линии L_2 с помощью некоторого преобразования (зеркального отражения, поворота и т. п).

Приведем примеры.

Пример 1. Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку r и лежала на данной прямой a, а остальные две вершины ромба лежали соответственно на данных прямых b и c.

Анализ. Пусть (рис. 369) $ABDC$ — искомый ромб, $AD = r$. Замечаем, что задача о построении ромба сводится к построению одной какой-либо из его вершин, например вершины C. По свойствам ромба точки B и C симметричны относительно прямой a. Поэтому при зеркальном отражении в прямой a точка B преобразуется в точку C, а, следовательно, прямая b — в некоторую прямую b', проходящую через точку C. Таким образом, точка C может быть построена как точка пересечения прямых c и b', из которых одна дана, а другая легко строится.

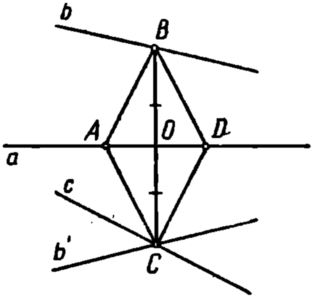


Рис. 369.

Построение. Строим последовательно: прямую b', симметричную с прямой b относительно прямой a; точку C, общую для прямых c и b'; прямую BC; точку $O \equiv BC \times a$; точки A и D на прямой a, отстоящие от точки O на расстоянии $\frac{r}{2}$; $ABCD$ — искомый ромб.

Доказательство ввиду его простоты опустим.

Исследование. Возможны следующие случаи: 1) $c \parallel b'$, решений нет; 2) $c \equiv b'$, решений бесконечно много; 3) прямые c и b' пересекаются вне прямой a, одно решение; 4) прямые c и b' пересекаются на прямой a, решений нет.

Пример 2. Даны точка O и прямые a и b, не проходящие через нее. Из точки O как из центра провести такую окружность, чтобы дуга ее, заключенная между данными прямыми, была видна из точки O под данным острым углом α.

Анализ. Допустим, что задача решена, ω — искомая окружность, A и B — концы дуги, заключенной между данными прямыми, $\angle AOB = \alpha$ (рис. 370). Если осуществить поворот прямой a около точки O на угол α, то точка A попадет в точку B. Следовательно, точка B может быть найдена как пересечение образа прямой a с прямой b. После этого легко строится искомая окружность.

Построение. Повернем прямую a около точки O на угол α. Пусть она займет после поворота положение a' (рис. 371).

Строим общую точку B прямых a' и b. Окружность $\omega(O, OB)$ искомая.

Доказательство. Допустим ради определенности, что поворот прямой a производился в направлении движения часовой стрелки. Повернем точку B около центра O на угол α в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки. Тогда прямая a' займет положение a, а точка B займет некоторое поло-

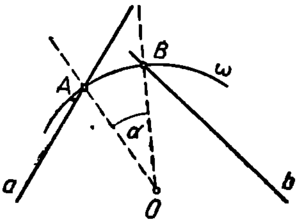


Рис. 370.

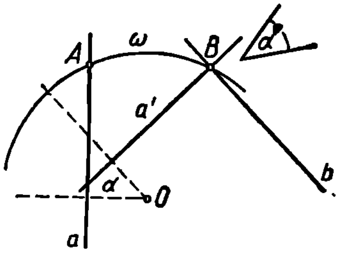


Рис. 371.

жение A на прямой a. Ясно, что $\angle AOB = \alpha$ и поэтому окружность ω действительно удовлетворяет условию задачи.

Исследование. Так как условием задачи направление вращения не предусмотрено, то прямую a можно повернуть около точки O на угол α как по часовой стрелке, так и в противоположном направлении. Поэтому прямая может занять после поворота два различных положения: a' и a''. Так как угол α по условию острый, то a' не параллельна a'' (угол между ними 2α). Возможны следующие случаи: 1) a' и a'' пересекают b; задача имеет два решения; 2) a' (или a'') параллельна b; одно решение; 3) a' (или a'') совпадает с b; решений бесконечно много.

Пример 3. Даны точка O и две не проходящие через нее прямые a и b. Провести через точку O такой луч, чтобы произведение его отрезков от точки O до точек пересечения с данными прямыми было равно квадрату данного отрезка.

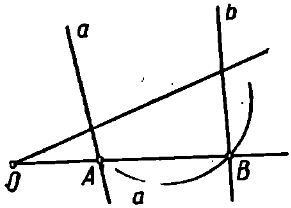


Рис. 372.

Анализ. Пусть O (рис. 372) — данная точка, a и b — данные прямые, OB — искомый луч, так что $OA \times OB = r^2$, где r — данный отрезок.

Инверсия относительно окружности $\omega(O, r)$ переведет точку A в точку B, а прямую a — в некоторую окружность a', проходящую через точку B. Таким образом, $B \equiv a' \times b$.

Построение. Строим последовательно: 1) окружность $\omega(O,r)$; 2) образ a' прямой a в инверсии относительно ω; 3) точку $B \equiv a \times \times b$; 4) луч OB, который и удовлетворяет условию задачи.

Доказательство. Пусть $A = OB \times a$. Тогда A — прообраз точки B в инверсии относительно $\omega(O, r)$, так как прямая a — прообраз окружности a'. Следовательно, по определению инверсии $OA \cdot OB = r^2$.

Исследование. Возможны следующие случаи: 1) окружность a' пересекает прямую b; задача имеет два решения; 2) окружность a' касается прямой b; одно решение; 3) окружность a' не имеет общих точек с прямой b; решений нет.

Так как искомая точка B должна соответствовать точке A в инверсии относительно $\omega(O, r)$, то точка B должна быть общей точкой прямой b и окружности a'. Отсюда следует, что других решений, кроме найденных, задача иметь не может.

Ситуация III. Удается подметить, что сравнительно просто можно построить фигуру Φ', из которой искомая фигура Φ может быть получена с помощью геометрического преобразования определенного вида (гомотетии, переноса или другого). После построения фигуры Φ' искомую фигуру Φ ищем среди тех фигур, которые возможно получить из фигуры Φ' с помощью преобразований указанного вида.

Иногда удается построить такую фигуру Φ', которая удовлетворяет всем условиям задачи, кроме, быть может, одного. Такое положение возникает часто в тех случаях, когда среди данных элементов искомой фигуры имеется лишь один отрезок (а остальные данные — углы и отношения отрезков); обычно при этом удобно воспользоваться гомотетией. Применяя гомотетию, полезно учесть следующие очевидные соображения: 1) если две фигуры подобны, то коэффициент подобия равен отношению любых двух соответствующих отрезков; 2) если отрезкам a, b, c ... соответствуют отрезки a', b', c', ..., то коэффициент подобия равен отношениям

$$\frac{a'+b'}{a+b}; \quad \frac{a'-b'}{a-b}; \quad \frac{a'+b'-c'}{a+b-c} \text{ и т. п.}$$

Пример 1. Даны две параллельные прямые a и b и точка P, лежащая между ними (рис. 373). Построить окружность, касающуюся прямых a и b и проходящую через точку P.

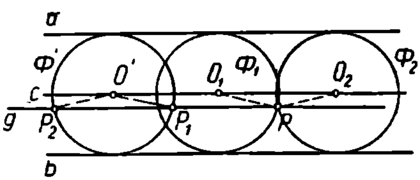


Рис. 373.

Решим этот пример методом параллельного переноса.

Построим любую окружность Φ', касающуюся прямых a и b. Для этого достаточно поместить ее центр O' где-либо на прямой линии c, «средней» к данным прямым a и b, и взять за ее радиус r половину расстояния между данными прямыми a и b. Окружность Φ', вообще говоря, не проходит через данную точку P. Искомую окружность Φ можно получить из окружности Ф′ параллельным переносом по направлению данных параллельных прямых. Перенос надо произвести так, чтобы окружность прошла через точку P. Остается найти вектор переноса.

Проведя через P прямую q, параллельную данным прямым, получим две точки P_1 и P_2 пересечения этой прямой с окружностью Ф′. За вектор искомого переноса можно принять вектор $\overrightarrow{P_1P}$ или вектор $\overrightarrow{P_2P}$.

Чтобы осуществить перенос окружности на данный вектор, достаточно перенести ее центр на такой вектор (и сохранить прежний радиус).

Перенося точку O' на вектор $\overrightarrow{P_1P}$, получим точку O_1. Перенося точку O' на вектор $\overrightarrow{P_2P}$, получим точку O_2. Окружности $\Phi_1(O_1, r)$ и $\Phi_2(O_2, r)$ — искомые решения нашей задачи.

Пример 2. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

Анализ. Искомый треугольник должен удовлетворять трем условиям:

1) он должен быть равнобедренный;

2) угол при вершине должен быть равен данному углу α;

3) сумма основания и соответствующей высоты должна быть равна данному отрезку l.

Замечаем, что легко построить треугольник, удовлетворяющий первым двум условиям. Таких треугольников существует бесконечно много. Пусть мы построили один из них — треугольник $B'AC'$ (рис. 374), причем $\measuredangle B'AC' = \alpha$. Искомый треугольник, удовлетворяющий условиям 1)—3), будем искать среди треугольников, гомотетичных треугольнику $B'AC'$ относительно какого-либо центра подобия, например относительно точки A. Пусть $\triangle BAC$ искомый. Ясно, что $BC \parallel B'C'$ (или BC совпадает с $B'C'$). Пусть AP' — высота треугольника $B'AC'$, P — точка пересечения прямых BC и AP. Ясно, что AP — высота треугольника BAC.

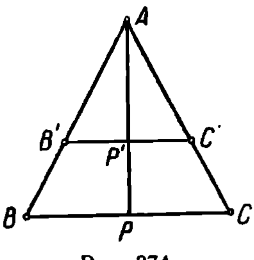


Рис. 374.

Если в некоторой гомотетии точке B' соответствует точка B, то точкам C' и P' соответствуют точки C и P. Найдем коэффициент гомотетии, преобразующей треугольник $B'AC'$ в треугольник BAC. По условию дан отрезок l такой, что $BC + AP = l$. Кроме того, располагая построенным треугольником $B'AC'$, мы можем построить отрезок l', равный сумме $B'C' + AP'$.

Тогда искомый коэффициент гомотетии равен $\frac{BC + AP}{B'C' + AP'}$, т. е. $l : l'$.

Итак, треугольник BAC гомотетичен треугольнику $B'AC'$ относительно центра подобия A, причем коэффициент подобия равен $l:l'$.

По этим данным искомый треугольник BAC может быть построен.

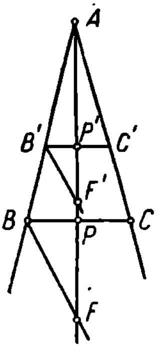


Рис. 375.

Построение.

1. Строим произвольный треугольник $B'AC'$ (см. рис. 375), удовлетворяющий условиям 1) и 2) (так что $B'A = C'A$ и $\measuredangle B'AC' = \alpha$).

2. Строим высоту этого треугольника AP' и на продолжении отрезка AP' откладываем отрезок $P'F' = B'C'$, так что $AF' = AP' + B'C'$. Эту сумму обозначим через l'.

3. Строим на луче AP' точку F такую, что $AF = l$.

4. Строим $\triangle BAC$, соответствующий $\triangle B'AC'$ в гомотетии $\Gamma\left\{A, \dfrac{l}{l'}\right\}$. Для этого последовательно строим $FB \parallel F'B'$, $BC \parallel B'C'$. $\triangle BAC$ искомый.

Доказательство.

Пусть $P \equiv BC \times AP'$. Так как $\triangle BAC \backsim \triangle B'AC'$, то

$$\frac{AP}{AP'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{l}{l'}.$$

Поэтому $\dfrac{AP + BC}{AP' + B'C'} = \dfrac{l}{l'}$. Но $AP' + B'C' = l'$ по построению. Значит, $AP + BC = l$.

Итак, $\triangle ABC$ удовлетворяет условию 3). Очевидно, что он удовлетворяет и условиям 1) и 2).

Исследование. Все шаги проведенного построения однозначно выполнимы. Поэтому данный способ построения дает единственное решение. Всякий другой треугольник $A_1B_1C_1$, удовлетворяющий условиям задачи, должен быть, очевидно, подобен построенному треугольнику ABC. Поэтому для всякого другого решения $A_1B_1C_1$, полученного каким-либо другим путем, будут выполняться соотношения:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1P_1}{AP} = \frac{A_1P_1 + B_1C_1}{AP + BC}.$$

Так как $A_1P_1 + B_1C_1 = AP + BC$, то и $B_1C_1 = BC$, откуда ясно, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Таким образом, всякий другой прием построения приведет к тому же решению, так что задача разрешима однозначно.

Ситуация IV. Замечаем при анализе, что прн некотором преобразовании искомая фигура переходит сама в себя. Если при этом предварительно построить образы данных точек и других фигур при том же преобразовании, то мы обогатим наличный набор данных фигур, и это может значительно облегчить решение задачи.

Пример 1. Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах квадрата. Кроме того, остался столб в центре квадрата. Требуется восстановить границу участка.

Анализ. Пусть $ABCD$ — искомый квадрат, O — его центр, M и N — данные точки соответственно на сторонах AB и CD (рис. 376).

Если повернуть квадрат на 180° около его центра O, то он преобразуется сам в себя. Точка M займет некоторое положение M' на стороне CD, а точка N — некоторое положение N' на стороне AB. После этого нетрудно уже построить прямые AB и CD и восстановить искомый квадрат.

Построение. 1) Строим точку M', симметричную M относительно O, и точку N', симметричную N относительно O. 2) Строим прямые MN' и NM'. 3) Повернем построенные прямые около точ-

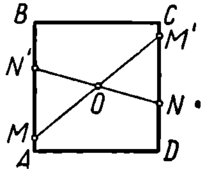


Рис. 376.

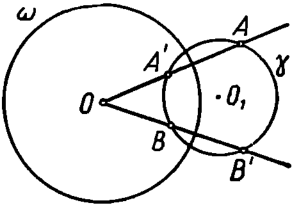


Рис. 377.

ки O на 90°. Четыре построенные прямые ограничивают искомый квадрат.

Доказательство опускаем.

Исследование. По смыслу задачи невозможен случай, когда точки M и N располагаются с точкой O на одной прямой, но не симметричны относительно O. Если точки M и N симметричны относительно O, то задача становится неопределенной. В остальных случаях задача имеет единственное решение.

Пример 2. Через две данные точки A и B провести окружность, ортогональную данной окружности $\omega(O, r)$ (рис. 377).

Если примем окружность ω за базисную окружность, то при инверсии искомая окружность γ преобразуется в себя, а точки A и B перейдут в точки A' и B' на этой окружности. Но окружность γ вполне определяется, если известны три точки на ней, например A, B и A'. Отсюда вытекает построение.

1) Строим точку A', инверсную точке A относительно окружности ω.

2) Строим окружность γ, проходящую через точки A, B и A', γ — искомая окружность.

Если точка A лежит на окружности ω, то точка A' совпадает с точкой A и указанный путь решения непригоден. В этом случае нужно провести аналогичное построение относительно точки B. Если обе точки A и B лежат на окружности ω, то построение можно выполнить так: через A и B проводим касательные к окружности ω и отмечаем точку их пересечения O_1. O_1 — центр искомой окружности.

Эти построения непригодны, если точки A, B и O расположены на одной прямой. Если при этом точки A и B не инверсны, то задача не имеет решения. Если же точки A и B инверсны относительно окружности ω, то задача имеет бесконечно много решений: любая окружность, проходящая через точки A и B, ортогональна окружности ω.

Понятно, что описанными выше ситуациями отнюдь не исчерпываются все возможности применения геометрических преобразований к решению задач на построение.

2. Рассмотрим еще один важный пример применения геометрических преобразований к решению задачи на построение.

Используя свойства инверсии, можно решить в общем случае известную задачу Аполлония о касании окружностей: *построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.*

Эта задача впервые была решена известным греческим геометром Аполлонием Пергским в III в. до н. э. в сочинении, которое до нас не дошло, но о котором упоминают некоторые древние математики (например, Папп). Способ, с помощью которого решил эту задачу Аполлоний, неизвестен. Многие задачи из числа рассматриваемых в школьном курсе геометрии представляют частные или предельные случаи задачи Аполлония. Частные случаи возникают при специальном расположении данных окружностей, предельные — когда все или некоторые из данных окружностей вырождаются в точки (радиус окружности неограниченно уменьшается) или в прямые (радиус неограниченно возрастает).

1-я вспомогательная задача: построить окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и данной окружности.

Задача обычно решается методом пересечения. Пусть a и b — данные прямые, $\gamma(O, r)$ — данная окружность (рис. 378). Из произвольной точки A прямой a опускаем перпендикуляр AB на прямую b. Через середину C отрезка AB проводим прямую c параллельно a. Строим окружность δ с центром в точке O радиуса $r + AC$ (или радиуса $|r - AC|$). Отмечаем точку пересечения этой окружности с прямой; это и будет центр искомой окружности.

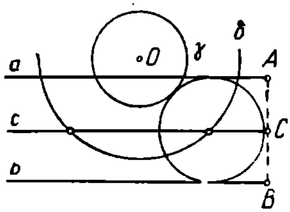


Рис. 378.

Эта задача может иметь до четырех различных решений.

2-я вспомогательная задача: построить окружность, касающуюся трех данных окружностей, если две из них взаимно касаются.

Эта задача решается методом инверсии. Пусть γ_1, γ_2 и γ_3 — данные окружности, причем γ_1 и γ_2 касаются в точке T (рис. 379). Примем точку T за центр инверсии, а за радиус инверсии — произвольный отрезок (удобно избрать его так, чтобы базисная окружность ω пересекла окружности γ_1 и γ_2). При инверсии окружности γ_1 и γ_2 преобразуются в пару параллельных прямых γ_1' и γ_2', а окружность γ_3 — в некоторую окружность (или прямую) γ_3'. Построить окружность γ', касающуюся прямых γ_1' и γ_2' и линии γ_3', мы умеем (см. 1-ю вспомогательную задачу). При инверсии этой окружности она преобразуется в окружность (или прямую) γ, которая будет касаться трех данных окружностей γ_1, γ_2 и γ_3.

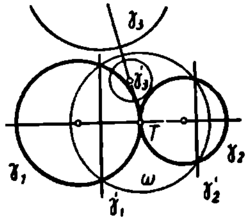


Рис. 379.

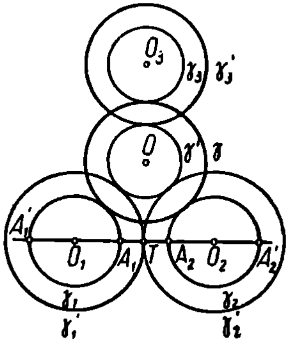


Рис. 380.

Решение задачи Аполлония в общем случае сводится к этой 2-й вспомогательной задаче. Мы воспользуемся для этого приемом, иногда называемым **методом расширения**.

Для определенности рассмотрим тот случай, когда каждая из трех данных окружностей расположена вне двух других (см. рис. 380). В других случаях решение проводится аналогично.

Пусть $\gamma_1(O_1, r_1)$, $\gamma_2(O_2, r_2)$ и $\gamma_3(O_3, r_3)$ — данные окружности. Пусть, далее, прямая O_1O_2 пересекает окружность γ_1 в точках A_1 и A_1', а окружность γ_2 — в точках A_2 и A_2'. Из четырех отрезков A_1A_2, $A_1'A_2'$, $A_1'A_2$ и A_1A_2' выберем кратчайший. Пусть это будет отрезок A_1A_2. Обозначим через T его середину. Увеличим радиусы всех данных окружностей на отрезок A_1T, т. е. построим окружности $\gamma_1'(O_1, r_1 + A_1T)$, $\gamma_2'(O_2, r_2 + A_1T)$, $\gamma_3'(O_3, r_3 + A_1T)$. Из них окружности γ_1' и γ_2' касаются в точке T. Мы можем теперь построить окружность γ', касающуюся трех окружностей γ_1', γ_2' и γ_3' (см. 2-ю вспомогательную задачу). Обозначим центр окружности γ' через O, а радиус — через r'. Если затем построить концентриче-

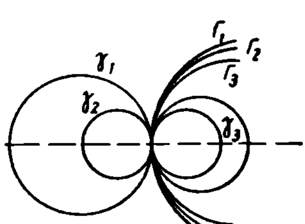


Рис. 381.

скую ей окружность $\gamma(O, r'+AT)$, то эта последняя будет касаться трех данных окружностей.

Если все три данные окружности γ_1, γ_2, γ_3 касаются в одной и той же точке (рис. 381), то задача Аполлония имеет, очевидно, бесконечно много решений (окружности параболического пучка). Полное исследование показывает, что во всех остальных случаях задача Аполлония имеет не более 8 решений.

§ 59. О ПОСТРОЕНИИ ОТРЕЗКОВ, ЗАДАННЫХ ФОРМУЛАМИ

1. Пусть даны отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\ldots$, $\bar{l}$; пусть a, b, $c, \ldots, l$ — их длины при некоторой избранной единице измерения. Требуется построить с помощью данных инструментов отрезок $\bar{y}$, длина которого y при той же единице измерения выражается через длины a, b, $c, \ldots, l$ данных отрезков заданной формулой:

$$y = f(a,\ b,\ c, \ldots,\ l).$$

Мы говорим в этих случаях кратко, что *строим выражение* $f(a, b, c, \ldots, l)$. В качестве данных инструментов будем в этой главе принимать циркуль и линейку. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что функция $f(a, b, c, \ldots, l)$, задающая длину искомого отрезка через длины данных отрезков, рассматривается для таких значений положительных аргументов, при которых она имеет смысл и положительна.

Чтобы различать отрезок и его длину, мы будем обозначать отрезки строчными буквами с чертой сверху: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}, \ldots, \bar{l}$, $\bar{x}$, $\bar{y}, \ldots$, а их длины — теми же буквами без черты: a, b, $c, \ldots, l$, x, $y, \ldots$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1) Дан отрезок, принимаемый за единичный. Требуется построить отрезок, длина которого была бы равна числу $y = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Может показаться, что для построения искомого отрезка необходимо представить y в виде десятичной дроби (а его лишь приближенно можно представить в виде конечной десятичной дроби) и затем отложить на прямой соответствующее число раз единичный отрезок, его десятые, сотые и т. д. доли. Однако существует совершенно иной способ, позволяющий построить искомый отрезок с помощью циркуля и линейки без всяких вычислений, притом не приближенно, а точно. Такой способ построения будет установлен ниже.

2) Пусть требуется построить несколько точек графика функции $y = \sqrt[4]{x}$. Например, надо построить на плоскости точку $x = 5$, $y = \sqrt[4]{5}$. Вычисляя приближенно и затем откладывая на перпендикуляре к оси абсцисс в точке $x = 5$ от этой точки последовательно целые, сотые и т. д. доли найденного приближенного значения

корня, мы можем получить точку, ордината которой приблизительно равна $\sqrt[4]{5}$. Но можно построить отрезок длиной $\sqrt[4]{5}$ без вычислений и построений такого рода, притом теоретически абсолютно точно. О том, как это делается, скажем ниже.

3) Имеем два отрезка $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причем длины их равны соответственно 6,8 и 3,7. Требуется построить отрезок $\bar{y}$, длина которого определяется формулой $y = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$. Мы увидим ниже, что для построения такого отрезка циркулем и линейкой вовсе не нужно ни возводить числа $a = 6{,}8$ и $b = 3{,}7$ в четвертую степень, ни извлекать корень из разности этих степеней: все это сделают циркуль и линейка.

Построение не усложнится, если a и b являются и более сложными для вычисления числами или даже неизвестны длины данных (начерченных) отрезков $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2. В школьном курсе геометрии обычно рассматривают построения циркулем и линейкой отрезков, заданных некоторыми простейшими формулами. Напомним эти построения.

1) $x = a + b$. Построение ясно из рисунка 382.

2) $x = a - b\,(a > b)$. Построение см. на рисунке 383.

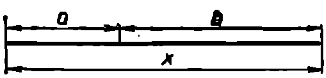


Рис. 382.

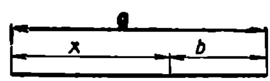


Рис. 383.

3) $x = na$, где n — натуральное число. Сводится к построению 1. На рисунке 384 построен отрезок $\bar{x}$, такой, что $x = 6a$.

4) $x = \dfrac{a}{n}$.

Строим луч, выходящий из какого-либо конца O данного отрезка $\bar{a}$ под произвольным углом к нему. Откладываем на этом луче

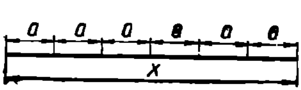


Рис. 384.

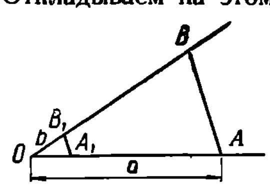


Рис. 385.

n раз произвольный отрезок $\bar{b}$, так что $OB = nb$ (рис. 385). Соединяем точку B со вторым концом A отрезка $\bar{a}$. Через точку B_1, определяемую условием $OB_1 = b$, проводим прямую, параллельную AB, и отмечаем точку A_1, в которой она пересечет отрезок $\bar{a}$.

5) $x = \frac{n}{m} a$ (n и m — данные натуральные числа).

Разделим отрезок $\bar{a}$ на m равных частей и увеличим полученный отрезок в n раз.

6) $x = \frac{ab}{c}$ (построение отрезка, четвертого пропорционального трем данным отрезкам).

Запишем условие в виде пропорции $c : a = b : x$. Пусть (рис. 386) $OA = a$, $OC = c$, так что члены одного из отношений отложены на одном луче, исходящем из точки O. На другом луче, исходящем из той же точки, откладываем известный член другого отношения

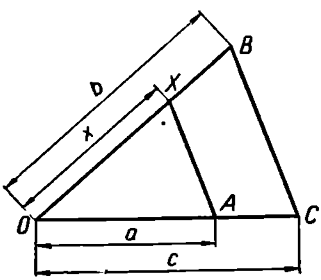


Рис. 386.

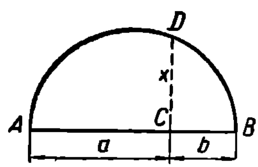


Рис. 387.

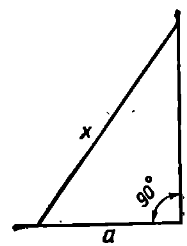


Рис. 388.

$OB = b$. Через точку A проводим прямую, параллельную BC, и отмечаем точку X ее пересечения с прямой OB. Отрезок OX искомый, т. е. $OX = x$.

7) $x = \frac{a^2}{c}$.

Можно воспользоваться построением 6, полагая $b = a$.

8) $x = \sqrt{ab}$ (построение среднего пропорционального двух данных отрезков).

Строим отрезки $AC = a$, $BC = b$, так что $AB = a + b$. На AB как на диаметре строим полуокружность (рис. 387). В точке C восставим перпендикуляр к AB и отметим точку D его пересечения с окружностью. Тогда $x = CD$.

9) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отрезок $\bar{x}$ строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b (рис. 388.)

10) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$. Отрезок $\bar{x}$ строится как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b.

К рассмотренным построениям можно свести построение отрезков, заданных более сложными формулами. Приведем некоторые примеры.

Пример 1. $x=a\sqrt{n}$, где n — натуральное число. Если $n=pq$, где p и q — натуральные числа, то $x=\sqrt{(pa)\cdot(qa)}$ и задача сводится к построению 8.

Для некоторых n применимы и другие приемы. Например, если $n=p^2+q^2$, то $x=\sqrt{(pa)^2+(qa)^2}$ и задача сводится к построению 9; если $n=p^2-q^2$, то задача сводится к построению 10.

Пример 2. $x=\frac{abc}{de}$.

Строим сначала $\bar{y}$, по формуле $y=\frac{ab}{d}$, затем $\bar{x}$ по формуле $x=\frac{cy}{e}$ (см. построение 6).

Пример 3. $x=\sqrt{a^4-b^4}$ $(a>b)$.

Ясно, что $x=\sqrt{\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$. Строим отрезки $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{x}$ по формулам: $y=\sqrt{a^2-b^2}$ (построение 10), $z=\sqrt{a^2+b^2}$ (построение 9), $x=\sqrt{y\cdot z}$ (построение 8).

3. Все алгебраические выражения, с построением которых мы встретились выше, обладают общим свойством: они являются однородными.

Функцию $y=F(a, b, c, \ldots, l)$ будем называть однородной измерения n, если при любом положительном значении числа k замена всех аргументов $a, b, c, \ldots, l$ соответственно на $k\cdot a$, $k\cdot b$, $\ldots$, $k\cdot l$ равносильна умножению всей функции на k^n. Иными словами, однородная функция должна удовлетворять равенству: $F(ka, kb, kc, \ldots, kl)=k^n\cdot F(a, b, c, \ldots, l)$ при всех положительных значениях k.

Например, функция $(a^2+b^2):(a^2-b^2)$ — однородная функция нулевого измерения, а функция $a^3:(b^4+c^4)$ — однородная измерения -1, функция $\sqrt[4]{a^4-b^4}$ — однородная измерения 1.

Пользуясь понятием однородной функции, нетрудно выделить некоторые классы алгебраических выражений, которые могут быть построены циркулем и линейкой.

1) *С помощью циркуля и линейки можно строить однородные алгебраические выражения 1-го измерения, которые образованы из длин данных отрезков исключительно с помощью действий умножения и деления.* Общий вид такого выражения: $x=\frac{a_1\cdot a_2\cdots a_n}{b_1\cdot b_2\cdots b_{n-1}}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ — длины данных отрезков.

Задача сводится к последовательному выполнению построений по формулам:

$$x=\frac{a_1\cdot a_2}{b_1},\quad x_2=\frac{x_1\cdot a_3}{b_2},\quad x_{n-2}=\frac{x_{n-3}\cdot a_{n-1}}{b_{n-2}},\quad x=\frac{x_{n-2}\cdot a_n}{b_{n-1}},$$

т. е. к построению четвертых пропорциональных отрезков к каждому из трех данных отрезков.

В частности, всегда можно построить циркулем и линейкой отрезки, заданные формулами вида

$$x=\frac{a^n}{b^{n-1}} \text{ и } x=\frac{a_1^{\alpha_1}\cdot a_2^{\alpha_2}\cdots a_k^{\alpha_k}}{b^{n-1}}. \quad (\alpha_1+\ldots+\alpha_k=n).$$

2) Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ..., $\bar{l}$ — данные отрезки, $P_{n+1}(a, b, c, \ldots, l)$ и $P_n(a, b, c, \ldots, l)$ — однородные многочлены (с рациональными коэффициентами) от a, b, c, ..., l измерения соответственно $n+1$ и n. *Циркулем и линейкой можно построить отрезок, заданный формулой:*

$$x=\frac{P_{n+1}(a, b, c, \ldots, l)}{P_n(a, b, c, \ldots, l)}.$$

Частный пример построения подобного выражения мы рассмотрели выше (см. пример 3). Использованный там прием применяется и в общем случае. Многочлен P_{n+1} является суммой однородных выражений вида $A\cdot a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdots l^{\lambda}$:

$$P_{n+1}=\sum A\cdot a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdots l^{\lambda},$$

где $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=n+1$, A — рациональное число. Аналогично

$$P_n=\sum A_1\cdot a^{\alpha_1}\cdot b^{\beta_1}\cdots l^{\lambda_1},$$

где

$$\alpha_1+\beta_1+\cdots+\lambda_1=n,$$

A_1 — рациональное число.

Пусть $\bar{d}$ — произвольный построенный отрезок, например, $\bar{a}$ или $\bar{b}$. Разделим числитель P_{n+1} на d^n, а знаменатель P_n на d^{n-1}. Тогда

$$x=d\cdot\frac{P_{n+1}/d^n}{P_n/d^{n-1}}.$$

$P_{n+1}:d^n$ представляет собой сумму выражений вида

$$A\cdot a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdots l^{\lambda}:d^n.$$

Каждое такое выражение можно построить (как указано в п. 1), после чего легко строится и сумма таких выражений. Обозначим полученный отрезок через $\bar{y}$, так что $y=P_{n+1}:d^n$. Аналогично построим отрезок $\bar{z}$, такой, что $z=P_n:d^{n-1}$. Искомый отрезок $\bar{x}$ построим по формуле $x=\frac{d\cdot y}{z}$.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок, длина которого задана в виде любой рациональной однородной функции 1-го измерения (с рациональными коэффициентами) от длин данных отрезков.

Пример. $x=\frac{a^4+b^4}{a^3-b^3+c^3}$ $(a^3+c^3>b^3)$.

Перепишем заданное выражение так:

$$x=\frac{a+\frac{b^4}{a^3}}{a-\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{a^2}}\cdot a.$$

Строим теперь отрезки $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{x}$ по формулам:

$$y=a+\frac{b^4}{a^3},\ z=a-\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{a^2},\ x=\frac{a\cdot y}{z}.$$

3) *Циркулем и линейкой всегда можно построить выражение вида* $x=\sqrt{R_2(a,\ b,\ \ldots,\ l)}$, где подкоренное выражение — однородная рациональная функция 2-го измерения с рациональными коэффициентами.

Пусть $\overline{d}$ — произвольный отрезок. Тогда

$$x=\sqrt{\frac{R_2(a,\ b,\ \ldots,\ l)}{d}\cdot d}.$$

Строим последовательно отрезки $\overline{y}$ и $\overline{z}$ по формулам: $y=R_2(a,\ b,\ \ldots,\ l):d$ (что возможно, ибо правая часть — рациональная функция 1-го измерения относительно a, b, c, ..., l и d) и $x=\sqrt{y\cdot d}$.

Пример. Пусть требуется построить выражение $x=\sqrt{ab+cd}$. Это выражение можно представить как $x=\sqrt{\left(\frac{ab}{d}+c\right)\cdot d}$. Строим $y=\frac{ab}{d}+c$ и затем $x=\sqrt{y\cdot d}$. Заметим, что данное выражение можно строить и так: сначала построить $u=\sqrt{ab}$ и $v=\sqrt{c\cdot d}$, а затем $x=\sqrt{u^2+v^2}$.

Общий прием построения отрезка, заданного однородной функцией 1-го измерения от длин данных отрезков, заключается в том, что мы выделяем последовательно однородные выражения 1-го измерения, которые мы умеем строить.

Пример. $x=\sqrt[4]{a^4+b^4}$.

Представим заданное выражение в виде $x=\sqrt{\sqrt{a^4+b^4}}$. Под квадратным корнем находится многочлен 4-го измерения. Нужно оставить под знаком корня выражение 2-го измерения, чтобы корень оказался однородным выражением 1-го измерения: $x=\sqrt{a\cdot\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}}$. Строим теперь отрезок $\bar{y}$ по формуле $y=\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}$, т. е. $y=\sqrt{a^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}$, а затем и отрезок $\bar{x}$ по формуле $x=\sqrt{yz}$.

4. В некоторых случаях (например, при вычерчивании кривых, заданных уравнениями) приходится строить алгебраические выражения, не являющиеся однородными первого измерения.

Построение произвольного выражения от n аргументов можно всегда свести к построению некоторого однородного выражения первого измерения от $n+1$ аргументов, если мы располагаем отрезком длиной 1. В самом деле, пусть нужно построить отрезок $\bar{y}$ по формуле $y=f(a, b, \ldots, l)$ где $f(a, b, \ldots, l)$ не является однородной функцией 1-го измерения от длин данных отрезков $a, b, c, \ldots, l$. Пусть нам задан (или нами выбран) некоторый отрезок $\bar{e}$ в качестве единого. Таким образом, $e=1$. Отсюда $f(a, b, \ldots, l)=$ $=e\cdot f\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \ldots, \frac{l}{e}\right)$. Поэтому задача сводится к построению отрезка по формуле:

$$y=e\cdot f\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \ldots, \frac{l}{e}\right).$$

Правая часть этого равенства — однородная функция 1-го измерения от длин отрезков $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\ldots$, $\bar{l}$ и $\bar{e}$. Если мы сумеем построить отрезок $\bar{y}$ по этой формуле, то он и будет искомым (при выбранной единице масштаба). Заметим, что мы получим различные (т. е. неравные между собой) отрезки в зависимости от выбора отрезка $\bar{e}$.

Рассмотрим несколько примеров.

1) $y=a^2$, где $\bar{a}$ — данный отрезок.

Пусть $\bar{e}$ — отрезок, принимаемый за единичный; тогда $y=\frac{a^2}{e}$. Задача свелась к известному построению (6), стр. 301.

2) $y=a\cdot b$.

Отрезок $\bar{y}$ строится по формуле $y=\frac{ab}{e}$.

3) $y=\frac{b}{a}$. Избирая $e=1$, получим $y=\frac{b\cdot e}{a}$.

4) $y=\sqrt{a}$.

Строится по формуле $y=\sqrt{a\cdot e}$, где $e=1$.

5) $y=\frac{a^3+b\cdot\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2+1}}$.

Ясно, что

$$y=\frac{a^3+b\cdot e\cdot\sqrt{a^2-e^2}}{e+\sqrt{a^2+e^2}}\quad (e=1).$$

Далее мы можем построить отрезок длины y, пользуясь приемами для построения однородных выражений.

§ 60. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Сущность алгебраического метода заключается в следующем. Решение задачи на построение сводят к построению некоторого отрезка (или нескольких отрезков). Величину искомого отрезка выражают через величины известных отрезков с помощью формулы. Затем строят искомый отрезок по полученной формуле.

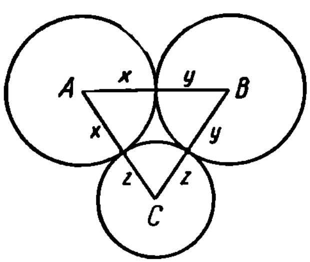


Рис. 389.

Пример 1. Из вершин данного треугольника как из центров описать три окружности, касающиеся попарно внешним образом.

Пусть ABC (рис. 389) — данный треугольник, a, b, c — его стороны, x, y и z — радиусы искомых окружностей. Выразим длины отрезков $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ через длины известных отрезков $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Тогда $x+y=c$, $y+z=a$, $z+x=b$. Поэтому $2x+2y+2z=$ $=a+b+c$, $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)$, откуда

$$x=\frac{c+b-a}{2},\quad y=\frac{a+c-b}{2},\quad z=\frac{b+a-c}{2}.$$

Строим теперь один из найденных отрезков, например $\bar{x}$, по формуле $x=\frac{c+b-a}{2}$ и проводим окружность (A, x). Две другие окружности проводим из центров B и C радиусами соответственно $c-x$ и $b-x$.

Для доказательства достаточно заметить теперь, что две последние окружности касаются между собой, так как сумма их радиусов

$$(c-x)+(b-x)=c+b-2x=(c+b)-(c+b-a)=a=BC,$$

т. е. равна расстоянию между их центрами.

Задача всегда однозначно разрешима, так как: 1) в треугольнике ABC $b+c>a$, и поэтому отрезок x может быть построен; 2) $c>x$, потому что $c-x=c-\frac{c+b-a}{2}=\frac{a+c-b}{2}>0$ (так как $a+c>b$); 3) $b>x$, потому что

$$b-x=\frac{a+b-c}{2}>0.$$

Пример 2. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и биссектрисе l прямого угла.

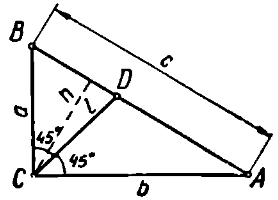


Рис. 390.

Задача легко решится после того, как удастся определить высоту h искомого треугольника, проведенную из вершины прямого угла. Из рисунка 390 видно, что $S_{ABC}=S_{ADC}+S_{BDC}$, т. е.

$$\frac{1}{2}c\cdot h=\frac{1}{2}b\cdot\frac{l}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}a\cdot\frac{l}{\sqrt{2}},$$

или

$$c\cdot h\sqrt{2}=(a+b)\cdot l. \qquad (1)$$

Остается исключить из этого соотношения два неизвестных катета a и b. Для этого нужно составить еще два независимых уравнения, которым удовлетворяют эти катеты:

$$a^2+b^2=c^2; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch. \qquad (3)$$

Отсюда

$$a^2+b^2+2ab=c^2+2ch,$$

или

$$(a+b)^2=c^2+2ch. \qquad (4)$$

Из формулы (1) имеем:

$$2c^2h^2=(a+b)^2\cdot l^2, \quad \text{или} \quad 2c^2h^2=(c^2+2ch)\cdot l^2.$$

Таким образом, искомая высота определяется из уравнения $2ch^2-2l^2h-cl^2=0$, из которого находим единственное положительное решение:

$$h=\frac{l\left(l+\sqrt{l^2+2c^2}\right)}{2c}.$$

Строим отрезок h по этой формуле. На произвольной прямой откладываем отрезок $AB=c$. На AB как на диаметре строим окружность. Проводим пару прямых, параллельных AB, на расстоянии h от этой прямой (рис. 391). Отмечаем точку C пересечения этих прямых с окружностью. Треугольник ABC искомый.

Перебирая последовательно шаги построения, замечаем, что последний шаг выполним тогда и только тогда, когда $h \leqslant \frac{c}{2}$, т. е. когда $\frac{l\left(l+\sqrt{l^2+2c^2}\right)}{2c} \leqslant \frac{c}{2}$. После упрощения это условие принимает вид: $l \leqslant \frac{c}{2}$. Если $l < \frac{c}{2}$, то пара прямых и окружность пересекаются в четырех точках, так что мы получим четыре треугольника, удовлетворяющих условию задачи. Однако они все равны. Поэтому задача имеет единственное решение. Если же $l = \frac{c}{2}$, то пара прямых касается окружности, и мы получаем два равнобедренных прямоугольных треугольника, удовлетворяющих условию задачи. Эти треугольники также равны между собой, задача имеет единственное решение. Итак, приведенный способ всегда позволяет найти единственное решение задачи, если выполнено условие: $l \leqslant \frac{c}{2}$.

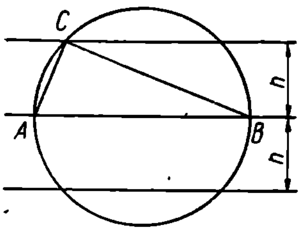


Рис. 391.

Нетрудно доказать, что два прямоугольных треугольника, имеющих равные гипотенузы и равные биссектрисы прямых углов, равны между собой. Поэтому других решений задача не имеет.

§ 61. ПРИЗНАК ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ОТРЕЗКА, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ ДАННЫХ ОТРЕЗКОВ, С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Пользуясь циркулем и линейкой, мы строили различные выражения — как однородные, так и неоднородные. Однако не всякое алгебраическое выражение можно построить этими инструментами. Из того, что длина некоторого (искомого) отрезка является известной функцией данных отрезков, еще не следует, что его можно построить циркулем и линейкой. Так, например, можно показать, что этими инструментами не могут быть построены отрезки, заданные формулами $y=\sqrt[3]{a^3+b^3}$, $y=\sqrt[5]{a^2b^3}$, и многие другие.

Установим критерий, который позволил бы выяснить в каждом отдельном случае, можно ли отрезок, заданный формулой, построить циркулем и линейкой или нельзя. Для краткости операции сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня (арифметического из неотрицательного числа) назовем **основными действиями**.

В дальнейшем мы предполагаем, что дан (или выбран) единичный отрезок (в том случае, когда строится однородное выраженне 1-го измерения, в этом нет необходимости).

Теорема. *Для того чтобы циркулем и линейкой можно было построить отрезок, длина которого является заданной положительной функцией длин данных отрезков, необходимо и достаточно, чтобы длину искомого отрезка можно было выразить через длины данных отрезков при помощи конечного числа основных действий.*

Доказательство.

1. *Достаточность.* Пусть нужно построить некоторый отрезок, длина которого выражается через длины данных отрезков с помощью конечного числа основных действий. Покажем, что такой отрезок можно построить с помощью циркуля и линейки. Мы уже видели, что циркулем и линейкой можно построить отрезок, длина которого равна одному из следующих выражений: 1) сумме длин построенных отрезков; 2) разности длин построенных отрезков (где уменьшаемое больше вычитаемого); 3) произведению; 4) частному длин двух построенных отрезков и 5) квадратному корню из длины построенного отрезка. Помимо перечисленных выражений, положительная функция, составленная только с помощью основных операций, может содержать одну или несколько отрицательных разностей. Но каждый раз, когда встретится такая разность, от нее можно перейти к положительной разности, пользуясь тождественным соотношением $a-b=-(b-a)$. После конечного числа таких тождественных преобразований данная функция будет содержать уже только разности, в которых уменьшаемое больше вычитаемого. Отсюда вытекает, что действительно можно выполнить последовательно все построения, соответствующие основным операциям, в том порядке, в каком эти операции указаны в заданной формуле, так что после конечного числа шагов мы действительно построим отрезок, длина которого выражается через длины данных отрезков заданной формулой.

2. *Необходимость.* Пусть известно, что отрезок $\bar{u}$, длина которого u является заданной функцией от длин данных отрезков $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p$ (т. е. $u=f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$), может быть построен циркулем и линейкой. Требуется доказать, что в таком случае длина отрезка u может быть выражена через длины данных отрезков с помощью конечного числа основных действий.

Как известно, всякое построение точек, выполнимое циркулем и линейкой, сводится к выполнению конечного числа следующих основных построений: 1) построение прямой, проходящей через две построенные точки; 2) построение окружности с центром в построенной точке и радиусом, равным расстоянию между двумя построенными точками; 3) построение общих точек: а) двух построенных прямых, б) построенной прямой и построенной окружности, в) двух построенных окружностей; 4) построение точки, заведомо не принадлежащей построенной фигуре или же заведомо ей принадлежащей (см. § 54).

Возможность построения отрезка $\bar{u}$ надо понимать как существование «цепочки» из конечного числа основных построений, которая приводит к искомому отрезку $\bar{u}$ при любом расположении данных отрезков. При этом результат построения (т. е. величина отрезка $\bar{u}$) не должен зависеть от положения данных отрезков $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_p$. Выбор произвольных точек (заведомо принадлежащих или заведомо не принадлежащих какой-либо попутно построенной фигуре) также не должен сказываться на величине $\bar{u}$ (хотя и может повлиять на его расположение).

Построим иа плоскости прямоугольную систему координат (рис. 392). Всегда можно расположить данные отрезки на положительном луче оси абсцисс так, чтобы одним из концов каждого отрезка служило начало координат O. Таким образом, на оси абсцисс образуются точки a_1 a_2, ..., a_p.

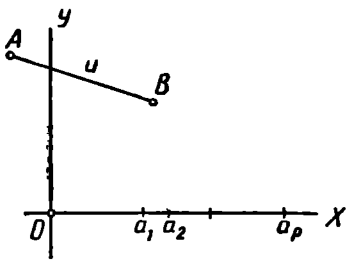


Рис. 392.

Ясно, что построение отрезка $\bar{u}$ равносильно построению его концов A и B. Так как отрезок $\bar{u}$ можно построить, то должна существовать цепь из конечного числа основных построений, в результате выполнения которых на каком-то m-м шаге будет построен один из концов отрезка (например, точка A), а на некотором s-м шаге — другой его конец (точка B). Длина отрезка $\bar{u}$ определяется через координаты (α, β) и (α', β') точек A и B по формуле:

$$u=\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}.$$

Нам нужно теперь показать, что числа α, β, α' и β' выражаются через числа a_1, a_2, ..., a_p лишь с помощью конечного числа основных действий.

Выясним, в чем сущность дальнейшего доказательства. Точки могут появляться в ходе построения либо как произвольно выбираемые, либо как общие точки двух ранее построенных линий. В первом случае мы можем ограничить себя в выборе и выбирать только такие точки, координаты которых выражаются через a_1, a_2, ..., a_p при помощи только основных операций. Во втором случае мы, как можно показать, всегда будем получать точки, координаты которых выражаются через координаты ранее построенных точек лишь при помощи основных действий.

В самом деле, располагая только циркулем и линейкой и какими-то данными отрезками, мы можем получить точку лишь одним из следующих способов:

I. Как точку пересечения двух ранее построенных прямых (причем предполагается, что каждая прямая проведена через две ранее построенные точки).

II. Как общую точку ранее построенной окружности с ранее построенной прямой.

III. Как общую точку двух ранее построенных окружностей.

Рассмотрим первую из этих трех возможностей.

Пусть точка $p(x, y)$ получена в пересечении двух прямых, из которых одна проходит через ранее построенные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), а вторая — через точки (x_1', y_1') и (x_2', y_2'). Уравнение первой прямой (ограничимся случаем, когда $x_2 \neq x_1$, $x_2' \neq x_1'$):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

или

$$y=kx+b, \tag{1}$$

где k и b рационально выражаются через числа x_1, y_1, x_2, y_2.

Аналогично уравнение второй прямой

$$y=k'x+b', \tag{2}$$

где k' и b' выражаются рационально через x_1', y_1', x_2', y_2'. Решая систему двух уравнений (1) и (2), убедимся, что координаты (x, y) точки пересечения прямых (1) и (2) выражаются через координаты ранее построенных точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_1', y_1'), (x_2', y_2') только с помощью основных (более того, рациональных) операций.

Мы пока ограничились случаем, когда ни одна из прямых не параллельна оси ординат. Но если прямая параллельна оси ординат (т. е. если уравнение прямой имеет вид $x=x_1$), то наш окончательный вывод сохраняется, в чем легко убедиться (выкладки опускаем).

Аналогичными рассуждениями возможно проверить, что и в случаях II и III получаем точки, координаты которых выражаются через координаты ранее построенных точек только с помощью основных действий (уже не обязательно рационально). Но к ранее построенным точкам применимы точно такие же рассуждения, так что их координаты выражаются в свою очередь через координаты еще ранее построенных точек тоже лишь при помощи действий. Эти рассуждения и приводят нас в конечном счете к выводу, что координаты точек A и B выражаются через координаты точек (a_1, O), (a_2, O), $\ldots$, (a_p, O), т. е. через числа a_1, a_2, $\ldots$, a_p, лишь при помощи основных действий, что и нужно доказать. Более полное доказательство необходимости данного критерия можно найти, например, в [4].

Следствие. *Если дан только отрезок, принимаемый за единичный, и l — данное число, то отрезок длины l может быть построен циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда число l может быть получено из 1 посредством лишь конечного числа основных действий.*

§ 62. О ЗАДАЧАХ, НЕ РАЗРЕШИМЫХ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

1. Нетрудно указать примеры задач на построенне, не имеющих решений: нельзя вписать окружность в данный прямоугольник (не являющийся квадратом), нельзя провести касательную из данной точки к данной окружности, если точка эта расположена внутри данной окружности, и т. п.

Неразрешимы обычно так называемые переопределенные задачи, т. е. задачи, содержащие излишние условия: построить треугольник по двум сторонам и двум углам, провести окружность через четыре данные точки и т. п.

Значительно интереснее те случаи, когда фигура, удовлетворяющая всем условиям задачи, заведомо *существует*, но *не может быть построена* при помощи тех или иных избранных инструментов геометрических построений. В этих случаях ставится задача о доказательстве невозможности выполнения данного построения данными средствами. Такого рода «доказательства невозможности» встречаются и в других разделах математики и часто принадлежат к числу наиболее трудных вопросов. Доказательство неразрешимости даже простых по формулировке задач на построение этого рода часто оказывается связанным с наиболее трудными вопросами алгебры и анализа и уводит далеко за пределы элементарной геометрии. Вопрос о разрешимости некоторых задач на построение (с помощью циркуля и линейки), возникших еще в глубокой древности, был разрешен только во второй половине XIX в.

Иногда доказательство неразрешимости той или иной задачи на построение можно провести средствами элементарной геометрии. В качестве примера покажем, что *нельзя провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку, пользуясь только линейкой.*

Доказательство поведем способом *от противного.*

Пусть в плоскости α задана точка P и прямая a. Допустим, что оказалось возможным провести через точку P прямую p, перпендикулярную к прямой a, пользуясь только линейкой. Это означает, что найдена конечная последовательность основных построений, которая всегда (т. е. независимо от выбора данной прямой a и данной точки P) приводит к построению искомого перпендикуляра.

Пусть (рис. 393) O — основание проведенного перпендикуляра. Проведем через данную прямую a какую-либо плоскость α', отличную от α, и в этой плоскости — наклонную p' к прямой a через точку O. Пусть P' — произвольная точка на прямой p', отличная от O. Представим себе, что сеть точек и прямых, построенная нами на плоскости α, проектируется на плоскость α' лучами, параллельными прямой $P'P$. При этом точки будут проектироваться в точки (в частности, P в P'), прямые — в прямые (прямая a — в себя), причем будут сохраняться все отношения принадлежности, существующие между точками и прямыми, так что весь проведенный нами процесс построения в плоскости α в точности повторится в плоскости α'. И если в плоскости α найденная последовательность основных построений привела к построению перпендикуляра p к прямой a, то и в плоскости α' должно оказаться, что прямая p' перпендикулярна к a. Но это заведомо не так.

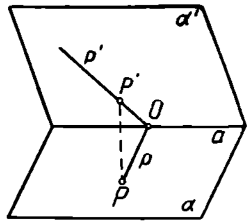


Рис. 393.

Та же идея проектирования позволяет доказать, что *исключительно линейкой нельзя разделить отрезок пополам, или провести параллель к данной прямой, или построить центр начерченной окружности* (см. например, [23], § 26).

2. Познакомимся с некоторыми классическими задачами на построеиие, решения которых не могут быть найдены с помощью циркуля и линейки. Важно заметить, что эти же задачи решаются с привлечеиием других инструментов построения, а также допускают приближенное решение с помощью циркуля и линейки. Во многих случаях решения с другими инструментами не представляют никакого затруднения, а приближенные построения дают решения, практически вполне удовлетворительные. Поэтому исследования неразрешимости конструктивных задач представляют главиым образом исторический и методологический интерес. Кроме того, они вскрывают связь теории геометрических построений с некоторыми важными вопросами других областей математики.

Задача о квадратуре круга пользовалась исключительной известностью с древнейших времен. Она привлекала к себе внимание прежде всего простотой формулировки: *построить циркулем и линейкой квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга.*

Многочисленные попытки ее решения не приводили к результату.

В XV в. были уже высказаны предположения о невозможности решить эту задачу циркулем и линейкой (Леонардо да Винчи и др.)

В дальнейшем делались попытки доказать неразрешимость этой задачи. Исследования этого вопроса вызвали к жизни некоторые проблемы из области алгебры и теории чисел.

Площадь круга радиуса r равна $\pi r^2 = \left(\sqrt{2\pi r \cdot \frac{r}{2}}\right)^2$,

т. е. равна площади квадрата со стороиой $\sqrt{2\pi r \cdot \frac{r}{2}}$, которая строится как средний пропорциональный отрезок между отрезками $2\pi r$ и $\frac{r}{2}$.

И если бы можно было, зная радиус круга r, построить отрезок длиной $2\pi r$, то легко можно было бы построить такой квадрат.

И обратно, если бы при данном r можно было построить квадрат, равновеликий кругу, то можно было бы построить отрезок, равный по длине окружности. В самом деле, если a — сторона упомянутого квадрата, то $\pi r^2 = a^2$, так что $2\pi r = \frac{2a^2}{r}$ и искомый отрезок строится как четвертый пропорциональный отрезок к отрезкам $2a$, a и r.

Итак, *задача о квадратуре круга равносильна задаче о спрямлении окружности*, т. е. построении отрезка длиной $2\pi r$. При $r=1$ эта длина равна 2π. Поэтому задача о спрямлении окружности привела к изучению свойств числа π.

В 1766 г. известным швейцарским математиком Иосифом Ламбертом (1728—1777) было дано первое доказательство иррациональности числа π. Но этим еще не решался вопрос о возможности квадратуры круга ни в положительном, ни в отрицательном смысле.

Согласно следствию, приведенному в конце § 61, спрямление окружности возможно при условии, что π является числом, которое можно получить из 1 с помощью только рациональных операций и операций извлечения квадратного корня. Известно, что такие числа являются алгебраическими, т. е. служат корнями многочленов с рациональными коэффициентами (см., например, [22]). Числа, не являющиеся алгебраическими, называют трансцендентными. Таким образом, для разрешимости задачи о квадратуре круга необходимо, чтобы число π было алгебраическим, а не трансцендентным.

Но в 1882 г. было доказано, что число π является трансцендентным числом (Ф. Линдеманн).

Вместе с этим, наконец, была разрешена проблема квадратуры круга: *квадратура круга невозможна с помощью циркуля и линейки*.

Известны различные приемы приближенного решения этой задачи с достаточной для практических целей точностью.

Если разделить окружность точками на достаточно большое число достаточно малых дуг, то периметр многоугольника, для которого эти точки служат последовательно вершинами, может быть принят за длину окружности. Этот прием широко используется в чертежной практике. Недостаток его состоит в том, что точность решения сравнительно трудно поддается учету.

Известно, что еще в III в. до н. э. Архимед нашел, что $\pi \approx \frac{22}{7}$. При таком допущении отрезок длиной $2\pi r$ строится как три целых и одна седьмая диаметра данной окружности. Это построение дает приближенное решение задачи с избытком, причем относительная погрешность не превышает 0,13%.

Оригинальный прием приближенного спрямления окружности был предложен в 1685 г. польским математиком Коханским (1631—1700). Сущность этого приема ясна из прилагаемого рисунка 394. На этом рисунке $AB=BC=AD=DB=DE=FG=GH=HI=1$,

$$CI=\sqrt{\frac{40}{3}-\sqrt{12}}\approx 3{,}141533,$$

т. е. отрезок CI дает приближенную величину длины полуокружности радиуса 1. Способ Коханского интересен тем, что построение осуществляется линейкой и циркулем постоянного размаха.

3. Решение некоторых интересных задач на построение сводится к построению корня кубического уравнения с рациональными коэффициентами, т. е. к построению отрезка x, длина которого x является корнем некоторого уравнения вида

$$r_0x^3+r_1x^2+r_2x+r_3=0 \qquad (1)$$

(где r_0, r_1, r_2, r_3 — рациональные числа).

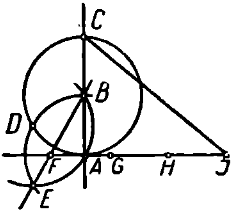


Рис. 394.

Нетрудно показать, что если такое уравнение имеет хотя бы один рациональный корень, то два других корня выражаются через 1 лишь с помощью основных операций. Однако для дальнейшего важно отметить, что и предложение, противоположное последней теореме, тоже справедливо. А именно верен такой чисто алгебраический факт:

Если уравнение вида (1) (с рациональными коэффициентами) *вовсе не имеет рационального корня, то ни один из корней этого уравнения не может быть выражен через* 1 *лишь с помощью основных действий.* Доказательство этого факта содержится в [4], стр. 211. Но в силу следствия, приведенного в конце § 61, отсюда следует, что если дан только единичный отрезок, а кубическое уравнение вида (1) с рациональным коэффициентом не имеет ни одного рационального корня, то построить корень этого уравнения циркулем и линейкой невозможно. Применим этот результат к выяснению разрешимости двух классических задач на построение.

Задача удвоения куба состоит в следующем: *зная ребро данного куба, построить ребро такого куба, объем которого был бы вдвое больше объема данного куба.*

Обозначая ребро искомого куба через x, приходим к уравнению $x^3=2a^3$. Принимая длину ребра данного куба за 1, получим $x^3-2=0$. Из алгебры известно, что рациональные корни приведенного уравнения с целыми коэффициентами могут быть только целыми и содержатся среди делителей свободного члена уравнения.

Но делителями числа 2 служат только числа $+1$, -1, $+2$ и -2, и ни одно из них, как легко проверить, не удовлетворяет данному уравнению. Следовательно, уравнение $x^3-2=0$ рациональных корней не имеет, а это означает, что *задача удвоения куба не может быть решена с помощью циркуля и линейки.*

Заметим, однако, что задача удвоения куба может быть математически строго решена с привлечением других инструментов. Так, например, еще около 400 г. до н. э. Платон нашел решение этой задачи с привлечением двух прямых углов (см. [4], стр. 213).

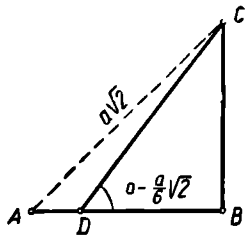


Рис. 395.

Задача об удвоении куба может быть решена с помощью циркуля и линейки лишь приближенно. Приведем один из самых простых способов приближенного решения этой задачи.

Пусть $AB=BC=a$, причем $AB\perp BC$ (рис. 395). Строим $AD=\frac{1}{6}AC$. Тогда $CD\approx \approx a\sqrt[3]{2}$ с точностью до 1%. В самом деле,

$$CD=\sqrt{a^2+BD^2}=a\sqrt{1+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}=\frac{a}{6}\sqrt{74-12\sqrt{2}}=$$
$$=a\cdot 1{,}2586\ldots$$

В то же время $\sqrt[3]{2}=1{,}2599\ldots$

Задача о трисекции угла состоит в том, чтобы *построить угол, который в три раза меньше данного угла.*

Ограничимся рассмотрением этой задачи для углов, не превышающих 90°. Если данный угол α тупой, то $\alpha=180^\circ-\beta$, где $\beta<90^\circ$, так что $\frac{\alpha}{3}=60^\circ-\frac{\beta}{3}$, и поэтому задача о трисекции тупого угла α сводится к задаче о трисекции острого угла.

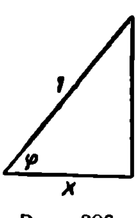


Рис. 396.

Заметим, что (при наличии единичного отрезка) задача о построении какого-либо угла φ ($\varphi\leqslant 90^\circ$) равносильна задаче о построении отрезка $x=\cos\varphi$. В самом деле, если угол φ построен, то построение отрезка $x=\cos\varphi$ сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу (см. рис. 396). Обратно, если построен отрезок x, то построение такого угла φ, что $x=\cos\varphi$, сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Пусть α — данный угол, φ — искомый угол, так что $\varphi=\frac{\alpha}{3}$. Тогда $\cos\alpha=\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$.

Поэтому, полагая $\cos\varphi = \frac{x}{2}$, $\cos\alpha = \frac{b}{2}$, приходим к уравнению:

$$x^3 - 3x - b = 0.$$

Возможно привести примеры, когда корни этого уравнения не могут быть построены циркулем и линейкой. Например, при $\alpha = 60°$ получим $b = 1$ и найденное уравнение принимает вид: $x^3 - 3x - 1 = 0$. Легко проверить, что это уравнение не обладает никаким рациональным корнем, откуда следует невозможность деления угла в $60°$ на три равные части с помощью циркуля и линейки.

Следовательно, *задача о трисекции угла неразрешима циркулем и линейкой в общем виде.*

Необходимо отметить, что она может быть решена этими инструментами в некоторых частных случаях. Хорошо известно, например, как делить на три равные части прямой угол. Предыдущие рассуждения приводят в этом случае к уравнению $x^3 - 3x = 0$, которое имеет корни 0, $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$. Практически построение сводится в этом случае к делению на три равные части заключенной между сторонами прямого угла дуги окружности с центром в вершине прямого угла. Это достигается путем откладывания на дуге $\frac{1}{6}$ части окружности от каждого конца дуги. После этого легко заметить, что трисекция возможна при $\alpha = \frac{90°}{2^n}$ (n — натуральное). Задача о трисекции оказывается разрешимой и при некоторых других частных значениях угла α.

Достаточно небольшого усиления конструктивных возможностей циркуля и линейки, чтобы трисекция любого угла стала уже выполнимой. Деление произвольного угла на три равные части может быть произведено, например, при помощи циркуля и линейки с двумя отметками. При этом к основным построениям, осуществляемым с помощью циркуля и линейки, присоединяется еще одно основное построение: через данную точку провести прямую так, чтобы ее отрезок между двумя построенными линиями был равен расстоянию между отметками на линейке (если такая прямая вообще существует). Практически эта операция осуществляется путем перемещения одной из отметок, например A (рис. 397), по одной из данных линий (на рис. по l_1) до тех пор, пока вторая отметка B попадает на вторую линию (l_2), причем линейка все время остается проходящей через данную точку P.

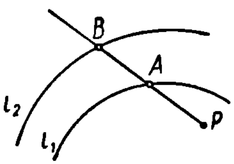


Рис. 397.

Трисекция угла с помощью циркуля и линейки с двумя отметками производится следующим образом. Пусть α — данный угол (рис. 398). Опишем из вершины угла окружность радиуса r, где r — расстояние между отметками на линейке. Пусть P — точка пересечения проведенной окружности с одной из сторон угла α. Проведем через точку P прямую так, чтобы отрезок ее между второй точкой (Q) ее пересечения с окружностью и точкой R пересечения с продолжением второй стороны угла α был равен r. Обозначая угол ORQ через φ и исходя из свойства углов равнобедренного треугольника и из свойства внешнего угла треугольника, мы без труда заметим, что $\alpha = 3\varphi$. Таким

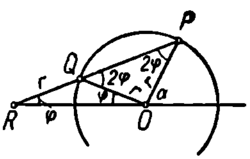


Рис. 398.

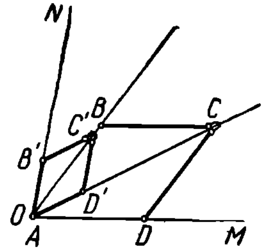


Рис. 399.

образом, угол φ представляет $\frac{1}{3}$ данного угла α. Этот способ построения приписывается Архимеду.

Существуют приборы, позволяющие выполнять трисекцию угла. Такие приборы называются т р и с е к т о р а м и. Один из них изображен на рис. 399. Он представляет соединение двух шарнирных ромбов $ABCD$ и $AB'C'D'$. Вершина C может скользить по стержню AD', а вершина C' — по стержню AB. Чтобы данный угол MON разделить на три равные части, помещают точку A в вершину угла O и направляют сторону ромба AD по стороне угла OM, а сторону

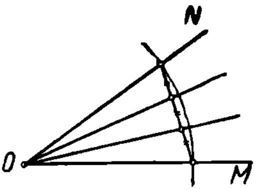


Рис. 400.

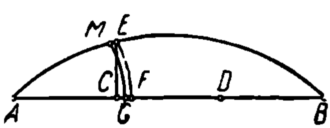


Рис. 401.

ромба AB' — по стороне угла ON. После этого диагонали ромбов AC и AC' разделят угол MON на три равные части.

В чертежной практике трисекция малых углов осуществляется приближенно так: проводят окружность из вершины данного угла как из центра, делят на три равные части хорду, стягивающую дугу этой окружности, заключенную между сторонами угла, и проводят радиусы через точки деления (см. рис. 400). Этот прием основан на том, что для малых центральных углов соответствующая дуга мало отличается от стягивающей хорды. Этот способ очень прост, но не всегда дает удовлетворительный результат.

Известно много различных способов приближенной трисекции угла.

Хорошее приближение можно получить, например, по способу, предложенному еще в начале XVI в. знаменитым немецким художником Альбрехтом Дюрером (1471—1528). На рисунке 401 показано приближенное деление дуги AB на три равные части по способу Дюрера. Здесь $AC=CD=DB=\frac{1}{3}AB$; $CE\perp AB$; $AF=AE$; $FG=\frac{1}{3}FC$; $AM=AG$. Тогда $\smile AM\approx\frac{1}{3}\smile AB$. Для острых углов ошибка не превосходит 18″.

Существуют способы, которые дают возможность производить трисекцию угла с любой степенью точности (см. [45]).

§ 63. ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В школьном курсе геометрии рассматривается построение правильных треугольников, квадратов, правильных шестиугольников и восьмиугольников. Иногда рассматривают также построение правильных пятиугольников (и вместе с этим десятиугольников). Метод построения меняется при этом в зависимости от числа сторон. Естественно, возникают вопросы об отыскании общего метода построения правильных многоугольников и об исследовании возможности построить правильный n-угольник при том или ином значении n.

Решение этих вопросов было связано с большими теоретическими трудностями. Проблема была полностью решена великим немецким математиком К. Ф. Гауссом (1777—1855) в 1796 г. Остановимся на этом вопросе в главных чертах.

Понятно, что вопрос о возможности построения правильного n-угольника равносилен вопросу о возможности деления окружности на n равных частей: если окружность разделена на n равных частей, то последовательное соединение точек деления приводит к построению правильного n-угольника; обратно, если построен правильный n-угольник, то легко определяется его центр, а следовательно, и центральный угол, соответствующий n-й части дуги окружности.

Значительное упрощение вопроса о возможности построения правильного n-угольника дает следующая теорема.

Теорема. *Если число n разлагается на два взаимно простых множителя p и q, то возможность деления окружности на n равных частей равносильна возможности деления окружности в отдельности на p и q равных частей.*

Ход рассуждения «в одну сторону» совершенно ясен, если окружность разделена на n равных частей, то, группируя эти части по p

частей, получим точки деления окружности на q частей, а группируя те же части по q, разделим окружность на p равных частей.

Допустим теперь, что, обратно, окружность может быть разделена как на p, так и на q равных частей. Составим уравнение $qx - py = 1$. Такое уравнение, как известно, всегда разрешимо в целых числах (так как коэффициенты его взаимно простые). Пусть x и y — целые решения этого уравнения. Тогда $\frac{x}{p} - \frac{y}{q} = \frac{1}{n}$, так что $x \cdot \frac{2\pi}{p} - y \cdot \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{n}$, и для получения $\frac{1}{n}$-й части окружности достаточно из повторенной x раз $\frac{1}{p}$-й ее части вычесть повторенную y раз $\frac{1}{q}$-ю ее часть. Например, чтобы разделить окружность на 15 равных частей, достаточно из удвоенной третьей части окружности вычесть утроенную 5-ю ее часть.

Из доказанной теоремы следует, что принципиальный интерес представляет только изучение тех случаев, когда n есть простое число или степень простого числа.

Перейдем к алгебраическому представлению задачи деления окружности.

Как известно, каждому числу $z = x + yi$ сопоставляется на декартовой координатной плоскости точка z с координатами (x, y).

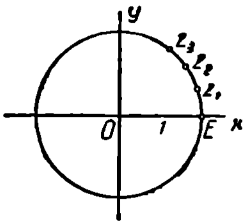


Рис. 402.

Комплексное число z называют **аффиксом** точки z. Для краткости вместо «построить точку (на данной декартовой координатной плоскости), аффиксом которой служит число $z = x + yi$» (т. е. точку с координатами x, y), часто говорят: «построить точку z» или «построить число z».

Пусть дана окружность $\omega(O, r)$, которую требуется разделить на n равных частей (n — простое). Без потери общности можно положить, что $r = 1$. Проведем через O две взаимно перпендикулярные оси OX и OY, которые примем за оси координат (рис. 402). Пусть положительный луч оси абсцисс пересекает окружность ω в точке E, так что эта точка имеет координаты (1, 0).

Задача деления окружности на n равных частей состоит далее в том, чтобы построить точки $z_k = \cos\frac{2\pi}{n} \cdot k + i \sin\frac{2\pi}{n} k$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), т. е. чтобы построить отличные от единицы корни уравнения $z^n - 1 = 0$.

Корни последнего уравнения, отличные от единицы, являются корнями уравнения

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0,$$

которое называют **уравнением деления окружности**.

Заметим, что (при простом n) для построения всех вершин правильного вписанного n-угольника достаточно построить какую-либо одну его вершину, отличную от E. Действительно, из алгебры известно (см., например, [22], гл. 1, § 5), что путем последовательного возведения в степень любого первообразного корня из единицы можно получить все корни уравнения $z^n - 1 = 0$. Геометрически это означает, что если (помимо E) построена какая-либо одна вершина E_k, то, откладывая последовательно по окружности дугу EE_k, мы после $n-2$ шагов получим все остальные вершины.

Для дальнейшего полезно еще следующее замечание. Пусть $z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = x + yi$. Тогда $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что если можно построить циркулем и линейкой отрезок $v = z + \frac{1}{z}$, то можно построить и точку z, и наоборот. В самом деле, легко заметить, что $x = \frac{v}{2}$.

Согласно сделанному выше разъяснению общий метод решения задачи о делении окружности на n равных частей с помощью циркуля и линейки сводится к исследованию вопроса: можно ли построить какой-либо корень уравнения $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$, и если можно, то как?

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть $n = 5$. Уравнение деления окружности имеет в этом случае вид:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \tag{1}$$

Выясним, может ли быть построен циркулем и линейкой какой-либо корень уравнения, например:

$$z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}. \tag{2}$$

Тем самым будет решен вопрос о возможности деления окружности на 5 равных частей циркулем и линейкой. Положим:

$$z + \frac{1}{z} = v, \tag{3}$$

где под z понимаем число (2). Тогда

$$v = 2\cos\frac{2\pi}{5}. \tag{4}$$

Так как число z удовлетворяет уравнению (1), то оно должно удовлетворять и уравнению

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0. \tag{5}$$

Так как $z+\frac{1}{z}=v$, то $z^2+\frac{1}{z^2}=v^2-2$, так что уравнение (5) можно представить в виде:

$$v^2+v-1=0.$$

Это уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень. В силу (4) v — положительный корень уравнения (6), т. е. $v=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отрезок такой длины может быть построен циркулем и линейкой. Следовательно, можно построить и точку $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$. Таким образом, установлено, что циркулем и линейкой можно разделить окружность на 5 равных частей.

Пусть теперь $n=7$. Этот случай приводит к уравнению, которое равносильно уравнению $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$. Положим $z+\frac{1}{z}=v$. Возведя это равенство почленно в квадрат и в куб, получим: $z^2+\frac{1}{z^2}=v^2-2$; $z^3+\frac{1}{z^3}=v^3-3v$, и мы приходим к уравнению $v^3+v^2-2v-1=0$. Нетрудно проверить, что это уравнение не имеет рациональных корней, так что отрезок V не может быть построен циркулем и линейкой (см. § 62). Таким образом, устанавливается, что построение правильного 7-угольника с помощью циркуля и линейки неосуществимо.

Проводя аналогичные рассуждения в общем виде, К. Ф. Гаусс в 1796 г. доказал следующую теорему.

Построение правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки возможно в том и только в том случае, когда число n может быть представлено в виде: $2^m\cdot p_1\cdot p_2\ldots p_s$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — *различные простые числа вида* $2^{2^k}+1$.

В частности, если n — простое число, то, для того чтобы правильный n-угольник можно было построить посредством циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы число n имело вид $2^{2^k}+1$.

Мы не имеем возможности проследить здесь рассуждения, которые приводят к этому замечательному критерию. Доказательство теоремы Гаусса можно найти в [43].

Приведем примеры.

При $k=2$ получаем: $2^{2^k}+1=17$. Это число простое. Следовательно, циркулем и линейкой можно построить правильный 17-угольник.

Невозможно построить циркулем и линейкой правильный 9-угольник, ибо $9=3^2$, и, следовательно, не выполняется одно из условий теоремы Гаусса (все p_i должны быть различны). После этого ясно, что нельзя также циркулем и линейкой построить угол в 1°, т. е. разделить окружность на 360 равных частей.

В практике употребляются различные способы приближенного решения задачи о построении правильного n-угольника. Так, например, для практических целей можно считать, что сторона правильного вписанного 7-угольника приблизительно равна половине стороны правильного вписанного в ту же окружность треугольника: при $r=1$ $a_7=2\sin\frac{360°}{14}\approx 0{,}868$, в то время как $\frac{a_3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}867$. Погрешность такого приближения не превышает 0,3%.

Описание одного общего приема приближенного построения правильного n-угольника можно найти в статье Б. А. Кордемского («Математика в школе», № 1, 1953).

В тех случаях, когда задача построения правильного n-угольника не может быть решена циркулем и линейкой, она может оказаться разрешимой иными средствами. Так, например, правильный 7-угольник может быть построен при наличии двух прямых углов. Доказано, что при наличии линейки с двумя пометками может быть тогда и только тогда построен правильный n-угольник, если n имеет вид $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_s$, причем $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа вида $2^k \cdot 3^m+1$ (α, β, k, m — целые числа). В частности, линейкой с двумя пометками можно построить правильный n-угольник при $n=7, 13, 19$, но нельзя построить, например, правильный 11-угольник.

§ 64. ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

Геометрическая задача на построение всегда решается с привлечением только некоторых наперед указанных средств. Этим самым круг производимых построений всегда ограничен: разрешено только как угодно комбинировать те основные построения, которыми характеризуются принятые инструменты, и пользоваться общими аксиомами конструктивной геометрии.

До сих пор мы рассматривали почти исключительно геометрические построения в условиях неограниченного применения циркуля и линейки. Эти условия могут быть более ограничены за счет сокращения числа применяемых инструментов, за счет ограничения размеров чертежа и инструментов и другими способами.

Многие геометрические задачи на построение естественным образом решаются с привлечением только циркуля, причем в привлечении линейки иногда не только нет необходимости, но это даже не может упростить решение таких задач. Таковы, например, задачи: «Разделить данную окружность на 6 равных частей» (решение которой общеизвестно); «Построить точку, симметричную данной точке, относительно данной прямой» и многие другие.

Во многих случаях построения, производимые посредством циркуля, оказываются значительно точнее, чем построения, производимые с привлечением линейки. Это давно уже было обнаружено при практических измерениях и построениях (например, в техническом черчении, при разметке делительных кругов астрономических инструментов и т. п.). Итальянский геометр Лоренцо Маскерони (1750—1800) занялся в свое время исследованием конструктивных возможностей циркуля, посвятив этому вопросу специальную книгу «Геометрия циркуля». В 1928 г. была обнаружена книга датского геометра Георга Мора (1640—1697), вышедшая еще в 1672 г. под названием «Датский Евклид». В этой работе также разработана теория геометрических построений, производимых исключительно циркулем.

Мор (в 1672 г.), а затем Маскерони (в 1797 г.) пришли к выводу, что все геометрические задачи на построение, решаемые при свободном пользовании циркулем и линейкой, могут быть решены исключительно циркулем.

Приведем доказательство этой интересной теоремы. Чтобы избежать недоразумений, которые могут возникнуть в связи с тем, что циркулем нельзя, конечно, строить прямые и отрезки, будем формулировать теорему Мора—Маскерони так:

Любая геометрическая задача на построение фигуры из конечного числа точек, разрешимая при наличии циркуля и линейки, может быть решена при наличии только циркуля.

При этом имеется в виду, что данная фигура состоит только из конечного числа точек, окружностей и их дуг, прямых, отрезков и лучей. Без этой оговорки теорема может привести к недоразумению. Например, если на чертеже проведена синусоида и даны две точки A и B, то нельзя утверждать, что при наличии только циркуля можно построить точки пересечения этой линии с прямой AB, хотя при наличии линейки эта задача, очевидно, разрешима (если точки пересечения существуют).

Условимся в этом параграфе называть прямую известной, если построены какие-либо две ее точки. Отрезок назовем известным, если построены его концы, а луч — если построены его начало и какая-либо принадлежащая ему точка.

Ясно, что известная прямая не является построенной: она может быть построена, если мы располагаем линейкой, но циркуль не дает возможности построить известную прямую.

Построение фигуры φ с помощью циркуля и линейки состоит в том, что устанавливается конечная последовательность основных (для циркуля и линейки) построений (см. § 1), в результате выполнения которых будет построена фигура φ.

Решая задачу с помощью циркуля и линейки, мы получаем точки лишь при выполнении следующих построений:

(1). Построение точки пересечения двух известных прямых (которые для этого предварительно строятся).

(2). Построение общих точек построенной окружности и известной прямой (для чего эта известная прямая строится на одном из предыдущих этапов построения).

(3). Построение общих точек двух построенных окружностей.

(4). Построение любого конечного числа точек, принадлежащих известной прямой (или известному лучу, или известному отрезку), для чего эта прямая предварительно строится.

(5). Построение любого конечного числа точек, принадлежащих построенной окружности (или дуге окружности).

(6). Построение точки, заведомо не принадлежащей соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей (или дуг окружностей) и известных прямых (для чего известные прямые предварительно строятся).

Понятно, что для выполнения построений (3) и (5) вообще не требуется никаких инструментов. Остается доказать, что другие построения, указанные в этом списке, т. е. построения (1), (2), (4), (6), выполнимы исключительно циркулем.

Иными словами, мы должны доказать, что при наличии только циркуля можно выполнить следующие построения:

(1′). Построить точку пересечения двух известных непараллельных прямых (не строя этих прямых).

(2′). Построить точки пересечения построенной окружности и известной прямой (если такие точки существуют).

(4′). Построить точку, принадлежащую известной прямой.

(6′). Построить точку, заведомо не принадлежащую соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей и известных прямых.

Чтобы доказать выполнимость построений (1′), (2′), (4′) и (6′) исключительно циркулем, решим предварительно следующую задачу:

Известны отрезки a, b и c; построить, пользуясь только циркулем, четвертый пропорциональный к ним отрезок, т. е. такой отрезок x, чтобы $a:b=c:x$.

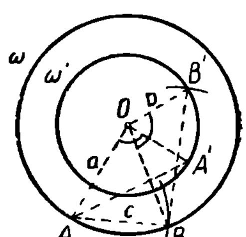


Рис. 403.

Можно предположить, что $a \neq b$, так как в случае $a=b$ задача тривиальна, потому что $x=c$.

Изберем на плоскости произвольную точку O и проведем окружность $\omega(O, a)$ (рис. 403).

Построим также концентрическую ей окружность $\omega'(O, b)$. Изберем произвольно точку A на окружности ω и точку A' на окружности ω'. Пусть B — точка пересечения окружности ω с окружностью (A, c), а B' — точка пересечения окружности ω' с окружностью (B, AA') такая, что треугольники AOA' и BOB' одинаково ориентированы. Теперь $\triangle AOA' = \triangle BOB'$ по трем сторонам, так что $\angle AOA' = \angle BOB'$. Отсюда вытекает, что $\angle AOB = \angle A'OB'$. Следовательно, равнобедренный треугольник AOB подобен равнобедренному треугольнику $A'OB'$, так что $AO:A'O = AB:A'B'$ или, по построению, $a:b = c:A'B'$. Таким образом, отрезок $A'B'$ искомый.

Примечание. Описанный здесь способ построения четвертого пропорционального отрезка не может быть применен, если $c>2a$, так как в этом случае окружности ω и (A, c) не имеют общих точек. Если при этом $b \leqslant 2a$, то в пропорции $a:b=c:x$, а следовательно, и в ходе построения можно поменять местами отрезки b и c. Если же $c>2a$ и одновременно $b>2a$, то построение также возможно. Мы опустим относящиеся к этому случаю рассуждения.

Переходим к рассмотрению основных построений (1′), (2′), (4′) и (6′).

Построение (1′). Даны четыре точки A, B, C и D. Построить точку пересечения прямых AB и CD, пользуясь только циркулем.

Допустим, что задача решена и точка L (рис. 404) искомая. Построим точки C', D', симметричные точкам C, D относительно прямой AB. Искомую точку пересечения прямых AB и CD можно

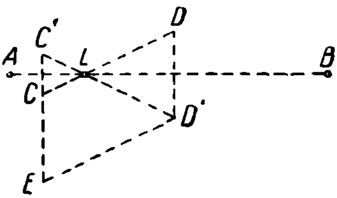


Рис. 404.

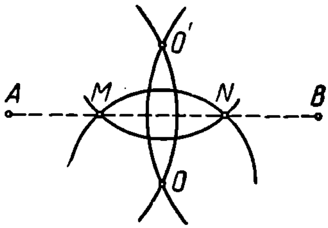


Рис. 405.

рассматривать теперь как точку пересечения прямых CD и $C'D'$. Если $CDD'E$ — параллелограмм, то точки C, C' и E лежат на одной прямой. Точка E может быть построена как точка пересечения окружностей (C, DD') и (D', DC).

Из подобия треугольников CLC' и $ED'C'$ видно, что $C'E:C'D'=$ $=C'C:CL$. Поэтому отрезок $C'L$ может быть построен как четвертый пропорциональный к трем известным отрезкам $C'E$, $C'D'$ и CC. Искомая точка L найдется после этого в пересечении окружностей $(C', C'L)$ и $(C, C'L)$.

Если прямые AB и CD окажутся перпендикулярными (CC' и DD' на одной прямой), то решение задачи упрощается: искомая точка L может быть построена как середина отрезка CC'.

Построение (2′). Даны две точки A и B и окружность (O, r). Требуется построить общие точки прямой AB и окружности (O, r), не проводя прямой AB.

Пусть O' (рис. 405) — точка, симметричная с точкой O относительно AB. Обозначим через M и N точки пересечения окружности (O', r) с окружностью (O, r). Так как каждая из этих точек одинаково удалена от точек O и O', то эти точки располагаются на прямой AB, которая служит симметралью отрезка OO'. Значит, M и N — искомые точки. Если окружности (O, r) и (O', r) касаются, то их общая точка является искомой.

Построение (2′) несколько усложняется, если точка O расположена на прямой AB: в этом случае точки O и O' сольются, и описанное построение не проходит. При таких условиях придется воспользоваться следующей вспомогательной задачей: построить середину данной дуги окружности.

Пусть (O, r) — данная окружность, AB — данная дуга этой окружности (рис. 406). Дополним фигуру ABO до параллелограмма $ABOC$ и до параллелограмма $ABDO$. Для этого достаточно провести ок-

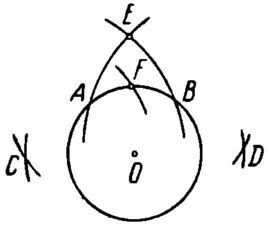


Рис. 406.

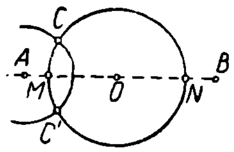


Рис. 407.

ружность (O, AB) и пересечь ее окружностями (A, r) и (B, r). Пусть E — одна из точек пересечения окружностей (C, CB) и (D, DA). Проводим окружность (C, OE) до пересечения с данной дугой AB в точке F. Тогда F — середина дуги AB. Для доказательства этого обозначим искомую середину дуги AB буквой X. Тогда $CX^2=$ $=CO^2+r^2$. С другой стороны, по известному свойству параллелограмма получим: $2AB^2+2AC^2=BC^2+AO^2$, откуда $BC^2=2AB^2+r^2$. Следовательно,

$$OE^2=CE^2-CO^2=CB^2-AB^2=AB^2+r^2=CO^2+r^2.$$

Значит, $CF^2=CO^2+r^2$, так как $CF=OE$. Таким образом, $CX=CF$, откуда следует, что точка F совпадает с серединой дуги AB.

Пользуясь этой вспомогательной задачей, можно выполнить построение (2′) в случае, если прямая AB проходит через центр O данной окружности (O, r).

Для этого изберем на данной окружности (O, r) произвольную точку C (рис. 407) и проводим окружность (A, AC). Пусть C' — вторая точка пересечения этой окружности с данной окружностью. Тогда середины M и N обеих дуг окружности (O, r) и будут искомыми точками пересечения прямой AB с окружностью (O, r). Может, конечно, случиться, что точка C' совпадет с точкой C. В этом случае точка C будет одной из искомых точек. Для построения второй искомой точки достаточно удвоить отрезок CO.

Построение (4′). Пусть известны две точки A и B. Требуется построить произвольное количество точек прямой AB, не проводя этой прямой. Изберем произвольную точку C плоскости. Если она окажется расположенной на прямой AB, то эта точка искомая. Допустим, что это не так.

Тогда построим (рис. 408) точку C_1, симметричную с точкой C относительно прямой AB. После этого для получения новых точек прямой AB (на рис. точки M_1 и M_2) достаточно провести окружности (C, r) и (C_1, r), где r — произвольный отрезок, больший чем $\frac{1}{2} CC_1$ (например, отрезок CC_1), и построить точки их пересечения; эти точки заведомо принадлежат прямой AB, так как каждая из них одинаково удалена от точек C и C_1.

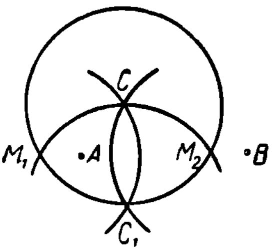


Рис. 408.

Построение (6′). Пусть построены k точек: A_1, A_2, ..., A_k и n окружностей: ω_1, ω_2, ..., ω_n, а также известны m прямых: a_1, a_2, ..., a_m. Ищется точка, не совпадающая ни с одной из этих точек и не принадлежащая ни одной из этих прямых или окружностей.

Изберем произвольную точку A и какую-либо точку B, не лежащую ни на одной из построенных окружностей (для чего не требуется ни линейки, ни циркуля). Тогда окружность ω_{n+1} (A, AB) не совпадает ни с одной из окружностей ω_1, ω_2, ..., ω_n. Этой окружности могут принадлежать некоторые из точек A_1, A_2, ..., A_k, на ней могут оказаться также точки пересечения с заданными окружностями. Изберем на окружности ω_{n+1} сверх этих еще $2m+1$ точек. Тогда по крайней мере одна из этих $2m+1$ точек удовлетворяет требованиям задачи, так как прямые a_1, a_2, ..., a_m могут встретиться с окружностью ω_{n+1} самое большее в $2m$ точках.

Теорема Мора — Маскерони, таким образом, доказана.

Для доказательства теоремы Мора — Маскерони можно воспользоваться также свойствами инверсии. Такой метод доказательства применяется в книге [1].

Общий метод решения какой-либо геометрической задачи на построение исключительно циркулем состоит в том, что намечают план ее решения посредством циркуля и линейки, а затем пользуются изложенными здесь способами замены построений циркулем и линейкой построениями исключительно циркулем.

§ 65. ПОСТРОЕНИЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Геодезисты в своей работе тесно связаны с геометрическими построениями и измерениями, причем в практике геодезических работ приходится пользоваться почти исключительно проведением прямых линий.

В связи с этим внимание математиков еще в XVII в. было привлечено к изучению геометрических построений, производимых исключительно линейкой. Такого рода построения рассматривал упоминавшийся уже нами Мор (в недошедшей до нас книге «Eucliedes curiosus», о которой упоминается в переписке некоторых математиков того времени). Ряд задач на построение линейкой рассматривали: Ламберт (в 1774 г.), Брианшон (1783 — 1864), написавший книгу «Приложения теории трансверсалей» (в 1818 г.), предназначенную для лиц, занимающихся землемерными работами, Понселé (1788—1867) в связи с его исследованиями по проективной геометрии.

Наиболее полные исследования в этой области произведены швейцарским геометром Я. Штейнером (1796—1863), который изложил их в известном сочинении «Геометрические построения, производимые с помощью прямой линии и неподвижного круга» (1833).

Как уже отмечалось, пользуясь только линейкой, можно решить очень ограниченный круг геометрических задач на построение. Нельзя, например, пользуясь исключительно линейкой, разделить отрезок пополам или провести параллель к данной прямой. Однако эти и многие другие задачи могут оказаться разрешимыми исключительно линейкой, если на плоскости дана некоторая вспомогательная фигура. Рассмотрим некоторые построения такого рода. Нам понадобится одно вспомогательное предложение («лемма о трапеции»): *Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолженных ее боковых сторон, делит оба основания трапеции пополам.* Доказательство этого предложения мы предоставляем читателю (см. также [4], гл. VIII, § 3).

Решим несколько задач, пользуясь исключительно линейкой.

Задача 1. Даны две параллельные прямые a и b и на одной из них, например a, отрезок AB. Построить середину этого отрезка.

Изберем произвольную точку P, лежащую вне полосы, ограниченной заданными прямыми (рис. 409). Проведем прямые PA и PB и отметим точки D и C их пересечения с прямой b. Пусть O — точка пересечения прямых AC и BD. Тогда, согласно предыдущей лемме, прямая PO пересечет отрезок AB в его середине M.

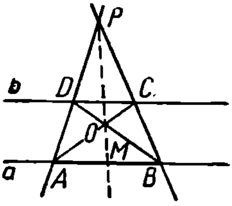


Рис. 409.

Задача 2. Зная середину M данного отрезка AB, провести через данную точку C прямую, параллельную AB.

Изберем на прямой BC, вне отрезка BC, произвольную точку P (рис. 409) и соединим эту точку с точками A и M. Пусть O — точка пересечения прямых PM и AC, D — точка пересечения прямых AP и OB. Тогда прямая CD искомая. Доказательство проводится на основании леммы о трапеции по методу от противного.

Задача 3. Через центр данного параллелограмма провести прямую параллельно его стороне.

Пусть $ABCD$ (рис. 410) — данный параллелограмм, O — его центр. Учтя, что $AO = CO$ и $BO = DO$, можно воспользоваться предыдущей задачей и провести $CE \parallel BD$ и $DF \parallel AC$. Если M — точка пересечения прямых CE и DF, то прямая OM параллельна стороне AD.

Для доказательства рассмотрим треугольник ACK, где K — точка пересечения прямых AD и CM. Треугольник DKM равен треугольнику ADO по двум сторонам и углу между ними. А потому $KM = OD = CM$. Следовательно, прямая OM служит средней линией треугольника ACK и поэтому параллельна его основанию.

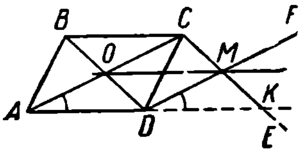


Рис. 410.

Оказывается, для решения как угодно сложной геометрической задачи на построение, разрешимой циркулем и линейкой, достаточно «воспользоваться циркулем не более одного раза». Точнее говоря: *Всякая геометрическая задача на построение фигуры, состоящей из конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости построена какая-либо окружность и отмечен ее центр* (при этом предполагается, что данная фигура состоит только из конечного числа точек, прямых, лучей, отрезков и дуг окружностей). Это предложение было установлено швейцарским математиком Я. Штейнером в 1833 г. Без доказательства оно было приведено еще в 1822 г. французским геометром Понселе в его «Трактате о проективных свойствах фигур». Поэтому эту теорему называют иногда теоремой Понселе — Штейнера.

Доказательство теоремы Штейнера проводится аналогично тому, как было проведено выше доказательство теоремы Мора — Маскерони. Мы не будем излагать это доказательство. Его можно найти, например, в [4].

Изучение конструктивных возможностей линейки продолжалось и после Я. Штейнера. В частности, советский математик Д. Д. Мордухай-Болтовский (1876—1951) в 1910 г. доказал, что теорема Штейнера остается в силе, если дана не вся вспомогательная окружность, а как угодно малая ее дуга (и отмечен центр этой окружности).

Выше уже было отмечено, что, пользуясь только линейкой, нельзя построить центр начерченной окружности. При этом предполагалось, что на плоскости нет никаких других построенных фигур. В связи с этим интересно отметить, что если построенные две пересекающиеся (или касающиеся) окружности, то центр каждой из них может быть построен с помощью только линейки (см. об этом [36], стр. 206—218 и 234—236).

§ 66. О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ С ДРУГИМИ ИНСТРУМЕНТАМИ

1. В чертежной практике широко пользуются угольником, двусторонней линейкой и другими инструментами. Было бы неправильно поэтому рассматривать эти инструменты как не заслуживающие теоретического изучения. На построения с циркулем и линейкой следует смотреть лишь как на один из возможных примеров геометрических построений с наперед заданными средствами, причем этот пример наиболее традиционен.

Крайне желательно, чтобы в практике школьного преподавания были затронуты вопросы о построениях с различными другими инструментами.

Рассмотрим здесь некоторые примеры этого рода.

В § 55 рассмотрено несколько построений посредством прямого угла и двусторонней линейки. Приведем здесь еще несколько примеров.

Пример 1. Разделить данный угол пополам, пользуясь только двусторонней линейкой.

Решение (рис. 411). Приложить линейку одним краем к одной из сторон угла, а по другому краю провести прямую. Повторить

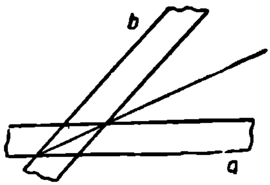


Рис. 411.

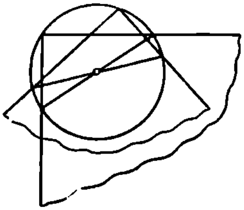


Рис. 412.

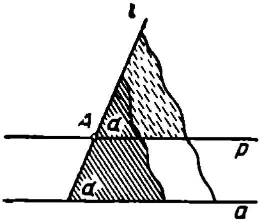


Рис. 413.

эту операцию для второй стороны угла. Точка пересечения проведенных прямых расположена на биссектрисе данного угла. Соединить ее с вершиной.

Пример 2. Построить центр начерченной окружности, пользуясь только прямым углом.

Ход решения виден из рисунка 412. Угол два раза помещают вершиной на окружности и отмечают точки пересечения сторон угла с окружностью. Соединяя эти точки попарно, получим два диаметра окружности.

Пример 3. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, пользуясь только данным углом.

Пусть (рис. 413) a — данная прямая, A — данная точка. Расположим данный угол так, чтобы одна из его сторон совпадала с прямой a, а другая проходила через точку A. Проведем прямую l по второй стороне угла. Передвинем угол вдоль прямой l

настолько, чтобы его вершина попала в точку A. После этого достаточно провести по стороне угла, не совпадающей с прямой l, прямую p, которая и будет искомой.

Пример 4. Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой a, пользуясь только двусторонней линейкой.

Выберем на прямой a произвольную точку B (рис. 414). Построим прямую AB. Проведем по одну сторону от прямой AB последовательно две параллельные ей прямые b и c, как это предусмотрено аксиомой B, б (§ 55). Пусть вторая из этих прямых, прямая c, пересечет прямую a в точке C, прямая AC пересечет прямую b в точке P, а прямая BP пересечет прямую c в точке X. Тогда четырехугольник $ABCX$ есть параллелограмм, потому что его диагонали AC и BX взаимно делятся пополам. Поэтому AX — искомая прямая.

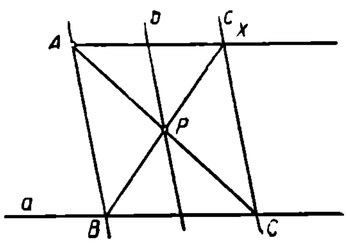


Рис. 414.

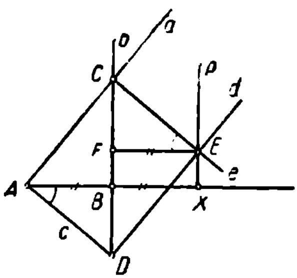


Рис. 415.

Пример 5. Удвоить данный отрезок AB, пользуясь только прямым углом.

Обратимся к построениям а), б) и в) аксиомы $Г$ (§ 55).

Проведем через данную точку A (рис. 415) произвольную прямую a, через точку B прямую $b \perp AB$ (построения а) и б), аксиома $Г$). Пусть прямые a и b пересекутся в точке C. Проведем еще через точку A прямую $c \perp a$, и пусть эта прямая встретится с прямой b в точке D. Проведем через D прямую $d \perp c$, а через C прямую $e \perp a$, и пусть прямые d и e встретятся в точке E. Если теперь X — основание перпендикуляра p к прямой AB, проведенного из точки E, то $BX = AB$, так что $AX = 2AB$, и задача решена. В справедливости последнего соотношения легко убедиться, если построить прямоугольный треугольник CEF. Тогда $\triangle CEF = \triangle DAB$ по гипотенузе и острому углу, так что $AB = EF$. В свою очередь, очевидно, $EF = BX$.

Пример 6. На данной прямой a отложить от данной точки O отрезок, равный данному отрезку AB, пользуясь только прямым углом.

Построение, приведенное в примере 3, позволяет построить параллелограмм $OABB'$ (рис. 416). Пусть, далее, $B'B'' = 2B'O$ (см. пример 5). Пусть X — такая точка прямой a, из которой отрезок $B'B''$

виден под прямым углом (построение в) аксиома Γ). Теперь $OX \equiv OB'$, как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла. А так как $OB' = AB$, то $OX = AB$ и точка X искомая.

2. Для систематического изучения различных инструментов геометрических построений необходимо прежде всего установить точный список основных построений, выполняемых тем или иным инструментом, как это было сделано нами для некоторых инструментов в § 55. После этого обычно выясняют, можно ли тем или иным инструментом выполнить основные построения, производимые циркулем и линейкой.

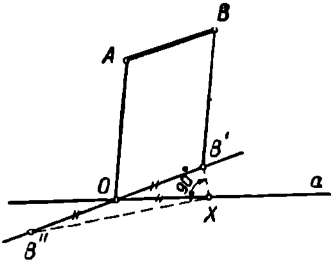


Рис. 416.

Таким путем было установлено, что *всякая геометрическая задача на построение конечного числа точек, которая может быть решена циркулем и линейкой, может быть решена также исключительно с помощью двусторонней линейки или исключительно с помощью данного угла* (см. об этом, например, [1]).

Из большого круга вопросов этого рода мы остановимся здесь подробнее на одном вопросе, близком к школьному курсу геометрии и почти не освещенном в литературе, — на построениях с циркулем и линейкой ограниченных размеров.

Допустим, что размах циркуля не превышает некоторого определенного отрезка r, а линейка имеет определенную длину l. Именно так обстоит дело в действительности, когда проводятся построения с циркулем и линейкой. Оказывается, что *всякая геометрическая задача на построение конечного числа точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена циркулем и линейкой ограниченных размеров.*

Для доказательства этого предложения приведем прежде всего список основных построений, которые выполняются циркулем и линейкой ограниченных размеров. Построения эти следующие.

1*. Построить отрезок, соединяющий две построенные точки A и B, если $AB \leqslant l$.

2*. Построенный прямолинейный отрезок AB неограниченно продолжить в направлении AB или в направлении BA. (Точный смысл построения 2* состоит в следующем: если построен отрезок AB, то, каков бы ни был построенный отрезок CD, всегда можно построить такой отрезок AM, содержащий отрезок AB, что $AM > CD$, и такой отрезок BN, содержащий отрезок BA, что $BN > CD$.)

3*. Построить окружность, центр которой находится в построенной точке и радиус которой равен построенному отрезку $r_0 \leqslant r$.

4*. Построить общие точки двух построенных линий (если такие точки существуют).

5*. Построить произвольное конечное число точек, принадлежащих построенной фигуре.

6*. Построить точку, заведомо не принадлежащую некоторой построенной фигуре.

Решим теперь некоторые вспомогательные задачи посредством циркуля и линейки ограниченных размеров. Ради определенности будем предполагать в дальнейшем, что $r<l$.

Задача 1. На данном прямолинейном отрезке AB отложить от точки A отрезок, равный построенному отрезку CD ($CD<AB$).

Если отрезок CD не превышает r, то решение общеизвестно. В противном случае откладываем на отрезке CD от точки C и на отрезке AB от точки A отрезок r последовательно до тех пор, пока оставшаяся часть отрезка CD не станет меньше r, после чего откладываем на отрезке AB также эту оставшуюся часть.

Задача 2. Построить середину данного (начерченного) отрезка AB.

Если $AB<2r$, то можно применить обычный прием.

В противном случае можно отложить на отрезке AB от обоих его концов по отрезку r и искать середину полученного таким образом отрезка A_1B_1 (рис. 417). Такое «укорачивание» данного отрезка придется, быть может, произвести несколько раз.

Задача 3. Через построенную

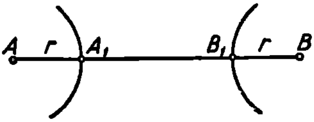


Рис. 417.

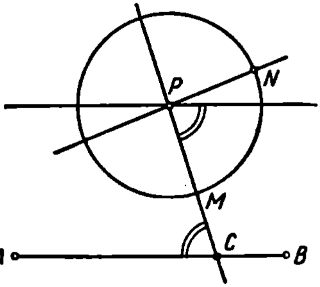


Рис. 418.

точку P провести отрезок прямой, параллельной построенному отрезку AB (рис. 418).

Построим окружность $\omega(P, r_0)$, где $r_0 \leqslant r$ (основное построение 3*). Пусть M и N — какие-либо две точки этой окружности, не лежащие на одном диаметре этой окружности (основное построение 5*). Очевидно, что по крайней мере одна из прямых PM и PN пересекает прямую AB. Поэтому при достаточном продолжении отрезков PM, PN и AB, каждый в обе стороны (основное построение 2*), непременно окажется построенной хотя бы одна из точек пересеченной прямой AB с прямой PM или PN. Пусть для определенности PM пересекается с AB в точке C. В пересечении образуется некоторый угол. Остается построить при точке P равный ему накрест лежащий угол. Построение угла, равного данному, может быть выполнено общеизвестным способом, независимо от ограничений в размерах инструментов.

Теперь уже легко доказать сформулированное выше предложение о построениях с циркулем и линейкой ограниченных размеров.

Согласно основному построению 1* две точки A и B можно соединить отрезком прямой, если $AB \leqslant l$. Докажем, что такой отрезок может быть построен с помощью инструментов ограниченных размеров также и в случае, если $AB > l$.

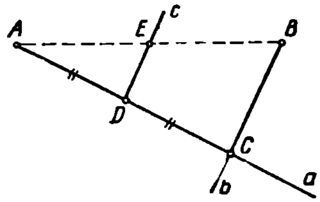


Рис. 419.

Пусть A и B — две построенные точки (рис. 419). Проведем через точку A какой-либо отрезок a, а через точку B (тем же методом, что и в задаче 3) — пересекающий его отрезок b. Пусть C — точка их пересечения. Построим середину отрезка AC — точку D (задача 2). Проведем через точку D отрезок c параллельно отрезку b по ту же сторону прямой a, что и отрезок CB. В силу основного построения 2* можно считать, что отрезок $c \geqslant \frac{1}{2} BC$.

Отложим на отрезке c отрезок $DE = \frac{1}{2} BC$ (1-я вспомогательная задача). Легко заметить, что E — середина отрезка AB. Если $AE = BE \leqslant l$, то отрезок AB уже может быть построен. В противном случае можно таким же путем построить середины отрезков AE и BE и т. д. После конечного числа шагов всегда образуются отрезки прямой AB, каждый из которых $\leqslant l$, так что каждый из них (а следовательно, и их соединение) может быть построен.

После того как мы установили, что любые две точки могут быть соединены отрезком, можно уже не принимать во внимание ограничений в размерах линейки. После этого справедливость доказываемого предложения непосредственно следует из теоремы Штейнера (§ 65), так как мы всегда имеем возможность избрать на плоскости какую-либо точку и построить окружность с центром в этой точке и любым заданным радиусом, меньшим r.

Практически приемы решения задач на построение с циркулем и линейкой ограниченных размеров не должны, однако, всегда копировать приемы построений с линейкой и штейнеровой окружностью, так как здесь мы располагаем довольно широкими возможностями в проведении окружностей.

Мы уже отметили в § 62, что задачи, решение которых сводится к построению корней уравнения 3-й степени (с рациональными коэффициентами), неприводимого над полем рациональных чисел, не могут быть решены циркулем и линейкой. Они не могут быть решены также с помощью двусторонней линейки или угольника. Установлено, что все такие задачи можно решить, если пользоваться линейкой с двумя пометками или двумя прямыми углами.

Наличие на плоскости каких-либо начерченных фигур часто расширяет конструктивные возможности того или иного инструмента.

Наиболее яркий пример этого рода представляют построения с линейкой при наличии начерченной окружности (построения Штейнера). В древности Никомед использовал конхоиду для трисекции угла, Диоклес указал способ удвоения куба с привлечением циссоиды. Декартом (1596—1650) было обнаружено, что всякая задача третьей или четвертой степени может быть решена циркулем и линейкой при наличии начерченной параболы. Ньютон (1643—1727) пришел к такому же выводу относительно эллипса или гиперболы (полное доказательство этого предложения было дано в середине XIX в.).

§ 67. ПОСТРОЕНИЯ С НЕДОСТУПНЫМИ ТОЧКАМИ

1. Общая теория геометрических построений развивается обычно в предположении, что любые две точки плоскости можно соединить прямой, что можно провести окружность, центр которой находится в любой точке и радиус которой имеет любые размеры, что может быть построена и в дальнейшем использована точка, в которой пересекаются две построенные линии. В практических условиях эти предположения могут и не выполняться. В частности, этому могут препятствовать размеры чертежа, в силу чего некоторые элементы данных или искомых фигур могут оказаться за его пределами, как это в действительности нередко случается в чертежной практике. При измерениях и построениях на местности не во всякую точку можно поместить геодезический инструмент и не всякий прямолинейный путь доступен для прохождения. В связи с этим обстоятельством возникла и развилась математическая теория геометрических построений с недоступными элементами.

Простейшие задачи на построения с недоступными элементами рассматривал еще Ламберт в книге «Свободная перспектива» (1774).

Будем называть точку *недоступной*, если к ней по условиям задачи нельзя применить аксиомы конструктивной геометрии, в частности аксиомы линейки или циркуля. Фигура считается недоступной, если все ее точки недоступны. Недоступная точка считается *известной*, если построены отрезки двух прямых, пересекающихся в этой точке. На рисунке 420 точка определена двумя прямыми a и b; обозначим ее $P(a, b)$.

Появление недоступных фигур существенно изменяет ход геометрических построений и обычно усложняет их. Однако можно доказать элементарными методами, что появление на плоскости нескольких недоступных точек не может перевести геометрическую задачу на построение циркулем и линейкой из класса разрешимых в класс неразрешимых.

2. Мы не ставим себе задачу дать полный очерк теории геометрических построений с недоступными элементами. Ограничимся рассмотрением некоторых примеров.

Пример 1. Через данную точку M (рис. 421) провести прямую MP, если $P(a, b)$ — известная недоступная точка.

Проведем через M какую-либо прямую, пересекающую данные прямые a и b соответственно в точках A и B. Проведем еще какую-либо прямую, параллельную AB, и пусть она встречается с a и b соответственно в точках A' и B'. Пусть точка M' делит

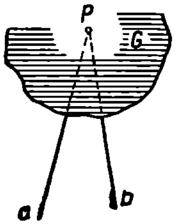


Рис. 420.

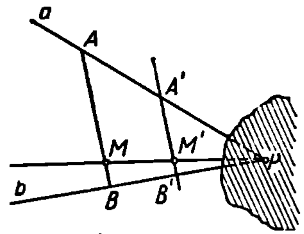


Рис. 421.

отрезок $A'B'$ в том же отношении, в каком точка M делит отрезок AB. Тогда прямая MM' искомая.

Пример 2. Разделить в данном отношении $m:n$ (m и n — данные отрезки) отрезок AB, один конец которого (например, B) недоступен.

Проведем какой-либо луч AL (рис. 422) и построим на нем $AM = m$, $AN = n$. Строим прямую BN (см. пример 1) и проводим $MM' \parallel BN$. Тогда прямая MM' пересекает прямую AB в искомой точке X.

Построение это можно провести и в том случае, когда оба конца данного отрезка AB недоступны: вне отрезка AB выбирает-

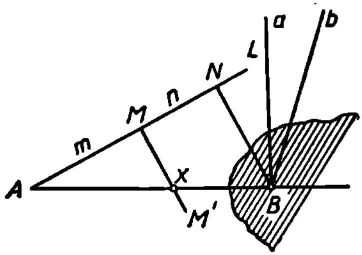


Рис. 422.

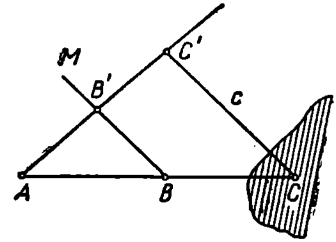


Рис. 423.

ся произвольная точка N, отрезок AN делится в данном отношении указанным способом, а затем повторяется вышеописанное построение.

Пример 3. Даны три точки A, B и C, лежащие на одной прямой, причем точка C недоступна. Найти такие отрезки m и n, чтобы отношение $AC:BC$ было равно отношению $m:n$.

Пусть C' — произвольная точка прямой c, проходящей через недоступную точку C (рис. 423). Проводим $BM \parallel CC'$. Пусть прямая BM пересечет AC' в точке B'. Тогда понятно искомое отношение $AC:BC=AC':B'C'$.

Пример 4. A и B — две известные недоступные точки. Через данную точку P провести прямую, параллельную прямой AB (рис. 424).

Построим прямую PA (см. задачу 1).

Пусть C — произвольная точка прямой PA. Определим отношение $AC:PC$ (см. задачу 3). Разделим отрезок BC точкой D в таком же отношении (см. задачу 2). Тогда прямая PD искомая, так как $\triangle PCD = \triangle ACB$ в силу наличия у этих треугольников общего угла C и пропорциональности $(AC:PC=BC:DC)$ сторон, заключающих этот угол.

К этой задаче легко сводится задача о проведении через данную точку перпендикуляра к прямой, проходящей через две известные недоступные точки.

Пример 5. На данной прямой a отложить от известной недоступной ее точки A отрезок, равный данному отрезку l.

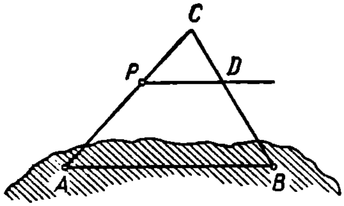


Рис. 424.

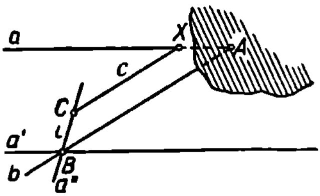


Рис. 425.

Пусть b (рис. 425) — вторая прямая, определяющая недоступную точку A. Выберем на прямой b произвольную точку B и проведем через нее прямую $a' \parallel a$. Строим прямую a'', симметричную с a' относительно b, и откладываем на этой прямой отрезок $BC=l$. Если c — прямая, проведенная через точку C параллельио прямой b, то точка X, в которой эта прямая пересекает прямую a, искомая, т. е. $AX=l$. В самом деле, трапеция $ABCX$ равнобедренная, так как углы при ее основании одинаковы.

В качестве *общего* приема решения задач на построение с недоступными точками можно пользоваться геометрическими преобразованиями. Сущность этого приема состоит в том, что подбирается такое преобразование, при котором те или иные недоступные точки преобразуются в доступные. Затем задача уже решается обычными методами. После того как получено соответствующее решение, остается применить обратное преобразование, чтобы получить решение для первоначального расположения фигуры.

Пример 1. $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ — две недоступные точки. Построить середину отрезка AB.

Применим метод симметрии.

Пусть s (рис. 426) — произвольная прямая, которую примем за ось симметрии.

Строим прямые a_1', a_2', b_1', b_2', соответственно симметричные прямым a_1, a_2, b_1 и b_2 относительно прямой s. Пусть $a_1' \times a_2' \equiv A'$, $b_1' \times b_2' \equiv B'$. Строим середину отрезка $A'B'$ — точку C'. Точка C, симметричная C' относительно s, искомая, так как равенство отрезков при симметрии сохраняется, причем дважды повторенная симметрия есть тождественное преобразование.

Иногда надобность в обратном преобразовании отпадает, как это видно из следующего примера.

Пример 2. Через данную недоступную точку A (a, b) провести прямую, параллельную данной прямой p.

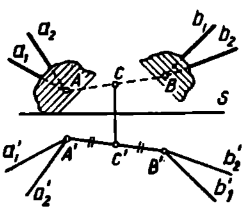


Рис. 426.

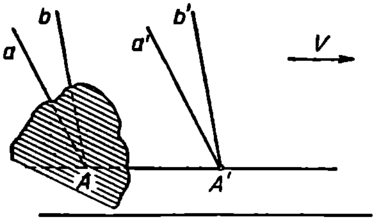


Рис. 427.

Произведем параллельный перенос данной фигуры на некоторый вектор $\vec{v}$, коллинеарный прямой p. Прямые a и b преобразуются при этом соответственно в прямые a' и b'. Пусть (рис. 427) $a' \times b' \equiv A'$. Прямая, проведенная через A' параллельно p, искомая.

Так как в чертежной практике всегда приходится иметь дело не со всей плоскостью, а лишь с ограниченной ее областью (чертежный лист), то здесь нередко возникают задачи о «построениях на ограниченном куске плоскости», когда всю остальную часть плоскости приходится рассматривать как недоступную. В подобных случаях обычно полезно применить гомотетию, так как она позволяет «сжать» чертеж в нужном отношении.

Для решения задач на построения с недоступными элементами можно также пользоваться теоремами проективной геометрии.

§ 68. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Построения в пространстве, как и построения на плоскости, опираются на некоторую систему аксиом.

Как мы знаем, каждый шаг построения на плоскости может быть оформлен (и обычно оформляется) с помощью соответственных чертежных инструментов. В отличие от этого стереометрические построения выполняют лишь мысленно, в уме. Чтобы было легче следить за ходом построения в пространстве, его сопровождают обычно выполнением условного чертежа-эскиза на листе бумаги.

Стереометрические построения используются в элементарной геометрии, в первую очередь для доказательства существования фигур, обладающих теми или иными свойствами. Именно так мы и поступали, например, при доказательстве существования различных видов правильных многогранников.

Система аксиом, используемых для стереометрических построений, может быть разбита на две группы: 1) общие аксиомы конструктивной геометрии; 2) инструментальные аксиомы.

В стереометрии мы всегда подразумеваем, что все пространство есть построенная фигура (это не означает, конечно, что следует считать построенной любую часть пространства).

Общие аксиомы, рассмотренные нами при изучении построений на плоскости, переносятся без каких-либо изменений на построения в пространстве. Поэтому мы не будем здесь их заново формулировать (см. § 54). Кроме того, как и в случае планиметрических построений, предполагаем, что в нашем распоряжении имеется некоторый набор инструментов, позволяющий строить новые фигуры, как линейные, так и двумерные. Обычно в качестве таких инструментов берут циркуль, линейку и их воображаемые пространственные аналоги, которые можно назвать сферографом и планиграфом. Описание конструктивных возможностей таких инструментов и составляет содержание аксиом, которые мы назвали инструментальными.

При наличии циркуля, линейки, планиграфа и сферографа инструментальные аксиомы можно сформулировать, например, следующим образом:

1. *В каждой построенной плоскости возможно построить каждую фигуру, построение которой на плоскости выполнимо циркулем и линейкой.*

2. *Если построены три точки, не принадлежащие одной прямой, то возможно построить проходящую через них плоскость* (аксиома планиграфа).

Планиграф мыслится, таким образом, как некоторая пластинка, позволяющая проводить плоскости в пространстве.

3. *Если построены центр сферы и какая-либо точка этой сферы, то возможно построить и саму сферу* (аксиома сферографа).

Мы мыслим себе, следовательно, что сферограф позволяет проводить в пространстве сферы.

Понятно, что данный список инструментальных аксиом условен и его можно изменять или дополнять.

Задача на построение в пространстве считается решенной, если она сводится к конечному числу построений, выполнимость которых гарантирована аксиомами.

Что касается методов построений в пространстве, то они аналогичны методам, применяемым в планиметрии. Как и в планиметрии, основными из них являются метод пересечения (метод геометрических мест), метод геометрических преобразований и алгебраический метод.

Целесообразно выделить некоторое число элементарных стереометрических задач на построение, разрешимость которых очевидным образом вытекает из принятых аксиом.

Перечислим несколько таких задач (решение предоставляем читателю).

Задача 1. Построить плоскость, проходящую: 1) через построенную прямую и построенную точку вне ее; 2) через две построенные пересекающиеся или параллельные прямые.

Задача 2. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Задача 3. Через данную точку вне данной плоскости провести плоскость, параллельную данной плоскости.

Задача 4. Из данной точки вне данной прямой опустить на эту прямую перпендикуляр.

Приведем примеры геометрических построений в пространстве.

Пример 1. Построить прямую, пересекающую каждую из двух данных скрещивающихся прямых a и b (рис. 428) и проходящую через данную точку P, не лежащую на этих прямых.

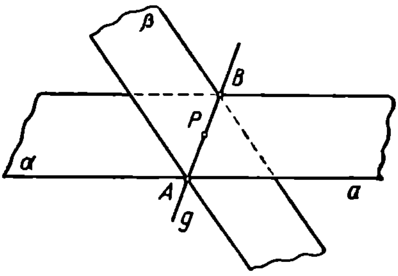


Рис. 428.

Ясно, что искомая прямая должна лежать как в плоскости, определяемой точкой P и прямой a, так и в плоскости, определяемой точкой P и прямой b.

Построим плоскость α, проходящую через точку P и прямую a, и плоскость β, проходящую через точку P и прямую b. Так как эти плоскости имеют общую точку P, то они имеют также некоторую общую прямую g.

Если прямая g пересекает прямую a в точке A, а прямую b — в точке B, то прямая g искомая.

Если прямая g параллельна прямой a или прямой b, то задача не имеет решений.

Плоскости α и β не могут слиться, так как, по условию, прямые a и b не лежат в одной плоскости. Следовательно, задача имеет одно решение или ни одного.

Пример 2. Пусть требуется через данную точку P, лежащую вне плоскости α, провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.

Анализ. Пусть (рис. 429) PM — искомая прямая.

Прямую PM мы могли бы построить, если бы предварительно была построена какая-либо плоскость β, проходящая через эту прямую.

Пусть $\alpha \times \beta \equiv a$.

Плоскость β и перпендикуляр PM мы легко построили бы, если бы построили прямую a.

Пусть Q — какая-либо точка прямой a, отличная от M. Соединим P и Q. Тогда QM — проекция наклонной QP. С наклонной и ее проекцией мы встречались в теореме о трех перпендикулярах: если прямая QN лежит в плоскости α, то QM и QP одновременно перпендикулярны к QM или одновременно к ней не перпендикулярны.

Прямую QN мы можем построить: это произвольная прямая на плоскости α. Опустив на нее перпендикуляр из точки P, найдем

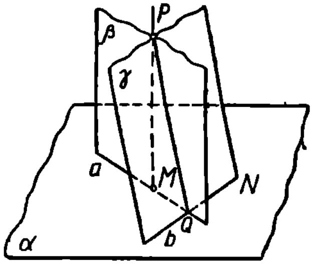


Рис. 429.

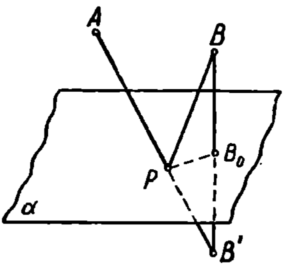


Рис. 430.

точку Q. Восставив к прямой QN перпендикуляр в точке Q (построение производится в плоскости α), мы построим прямую a. Затем уже нетрудно построить и искомый перпендикуляр PM.

Построение.

1. В плоскости α строим произвольную прямую b.
2. Строим плоскость γ, проходящую через P и b.
3. В плоскости γ опускаем из P перпендикуляр PQ на b.
4. В плоскости α через точку Q проводим прямую a так, чтобы было $a \perp b$.
5. Строим плоскость β, проходящую через P и a.
6. В плоскости β опускаем из P перпендикуляр PM на a.

Прямая PM искомая.

Доказательство. Плоскость β проходит через две пересекающиеся прямые (PQ и a), перпендикулярные к b. Следовательно, $\beta \perp b$. Но $b \subset \alpha$, так что $\gamma \perp \alpha$. Прямая PM лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей (β) и перпендикулярна к линии (QM) пересечения этих плоскостей. Следовательно, $PM \perp \alpha$, что и требовалось доказать.

Данная задача всегда имеет решение и притом единственное.

Пример 3. Две точки A и B (рис. 430) расположены по одну сторону от плоскости α. Требуется среди точек плоскости α выбрать такую точку P, чтобы ломаная APB имела наименьшую длину.

Пусть P — любая точка плоскости α. Пусть B' — отражение точки B в плоскости α. Ясно, что при этом

$$AP + PB = AP + PB'.$$

Значит, поставленная задача сводится к построению в плоскости α такой точки P, чтобы ломаная APB' была кратчайшей. Ясно, что решение будет получено в том случае, когда ломаная APB' превращается в прямую.

Итак, построение искомой точки P сводится к следующему:

1. Построить прямую BB_0, перпендикулярную плоскости (об этом см. в предыдущем примере).

2. Построить на луче, дополнительном к $\overline{B_0B}$, такую точку B', чтобы отрезок B_0B' равнялся отрезку B_0B (это построенне можно выполнить в любой плоскости, проходящей через прямую B_0B).

3. Построить прямую AB' (для чего можно воспользоваться аксиомой линейки в любой плоскости, проходящей через точки A и B').

4. Построить точку P пересечения прямой AB' с плоскостью α (см. аксиому VI, § 54).

Точка P и есть искомая точка.

§ 69. О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

1. Мы рассмотрели теорию геометрических построений на плоскости и в пространстве. Возможно рассматривать геометрические построения на различных поверхиостях. Наиболее разработана теория геометрических построений на сфере. Возможно также изучать геометрические построения, например, на поверхности цилиндра, конуса или тора.

Общие аксиомы конструктивной геометрии, приведенные в § 1, сохраняются без существенных изменений и при изучении построений на поверхностях. Как и на плоскости, для таких построений привлекаются те или иные инструменты, характеризуемые соответствующими аксиомами. Так, например, для построеиий на сфере привлекают циркуль, которым можно проводить на сфере окружности любого радиуса. Для построений на цилиндрической поверхности можно привлечь *гибкую линейку*, т. е. инструмент, позволяющий проводить на этой поверхности линии кратчайших расстояний. Для построений на поверхности цилиндра можно пользоваться также эластичной *круглой пластинкой*. Она позволяет выполнять на поверхности цилиидра те же построения, что круг постоянного радиуса на плоскости. Для построений иа сфере часто пользуются *циркулем постоянного размаха*, вычерчивающим большие окружности; его радиус должен, очевидно, составить $R\sqrt{2}$, где R — радиус сферы. Такой циркуль называют иногда *сферической линейкой*, так как большие окружности играют на сфере ту же роль, что прямые на плоскости (служат линиями кратчайшего расстояния между двумя точками).

Встречаются интересные геометрические построения на *комбинации поверхностей*, например на сфере и плоскости, причем допускается перенос отрезков, окружностей и других линий с одной поверхности на другую.

До сих пор нет общей теории построений на каких-либо поверхностях, отличных от плоскости и сферы. Не решен, в частности, вопрос о конструктивных возможностях отдельных наборов инструментов, применяемых на какой-либо из поверхностей (отличной от плоскости и сферы).

Чтобы дать представление о характере геометрических построений на поверхностях, рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Представим себе, что на сфере выбрана некоторая точка P и требуется построить диаметрально противоположную ей точку P', располагая только циркулем постоянного размаха, вычерчивающим большие окружности этой сферы (т. е. «сферической линейкой»).

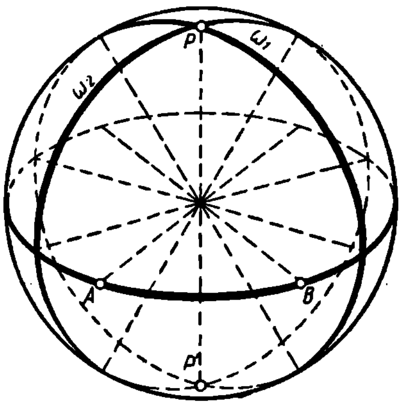


Рис. 431.

Пользуясь циркулем постоянного размаха, описываем на сфере вокруг точки P большую окружность; на этой окружности выбираем две точки A и B, не являющиеся диаметрально противоположными. Затем описываем две большие окружности ω_1 и ω_2 вокруг A и B (рис. 431).

Окружности ω_1 и ω_2 пересекутся в двух точках, из которых одна — точка P, а вторая — искомая точка P'.

Доказательство не представляет труда.

Пример 2. Пусть требуется начертить большую окружность на поверхности данного деревянного шара.

Допустим при этом, что мы располагаем только обычным циркулем, который можем применить также для построения на листе бумаги (следовательно, речь идет о комбинации поверхности сферы с плоскостью). Для построений на листе бумаги будем пользоваться еще обычной линейкой.

Решение. Описываем на сфере около произвольной точки P окружность ω. Чтобы построить на листе бумаги окружность ω', равную окружности ω, выбираем на ω произвольно три точки A, B, C и строим на плоскости (на листе бумаги) треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC. Около треугольника $A'B'C'$ описываем окружность ω'; она и будет равна окружности ω.

После этого нетрудно построить отрезок r, равный радиусу окружности ω', а значит, и окружности ω.

Рассмотрим на сфере точку Q, симметричную точке P относительно центра сферы (рис. 432). Пусть M — точка встречи диаметра PQ с плоскостью окружности ω (так что M — центр этой окружности). Рассмотрим большой круг, определяемый точками P, Q и A.

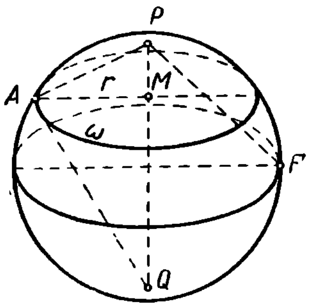


Рис. 432.

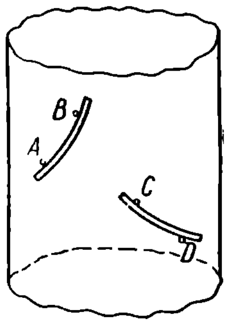


Рис. 433.

В прямоугольном треугольнике APQ известны катет AP и высота $AM = r$. По этим данным можно построить на плоскости треугольник $A'P'Q'$, равный треугольнику APQ.

Искомый радиус PF, которым надо проводить большую окружность на сфере, строится теперь как гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника, катет которого равен $\frac{1}{2}PQ$.

2. Обычная линейка не позволяет проводить на поверхности цилиндра какие-либо линии, кроме образующих. Обычный циркуль чертит на поверхности цилиндра очень сложную неплоскую кривую, которую нельзя использовать для осуществления самых простых и употребительных построений.

Одним из наиболее естественных для построений на поверхности цилиндра инструментов является, по-видимому, двусторонняя «эластичная линейка». Этот инструмент можно положить на поверхность цилиндра так, чтобы один его край проходил через две заданные на поверхности точки A и B (рис. 433), или (если расстояние между точками больше ширины линейки) так, чтобы один край проходил через одну из двух данных точек, а другой — через другую (точки C и D на рис. 433).

Построения с эластичной двусторонней линейкой на поверхности цилиндра можно рассматривать как построения с двусторонней линейкой (которая описана в § 54) на плоской полосе, в которую можно превратить поверхность цилиндра, разрезав ее по одной из образующих.

В § 54 было показано, как можно построить этим инструментом середину данного отрезка. В § 66 рассмотрены задачи о проведении параллели и о делении данного угла пополам.

Как уже отмечалось, двусторонняя линейка позволяет решить на плоскости любую задачу на построение точки, которая может быть построена циркулем и линейкой. Соответственно этому определяется круг задач на построения на поверхности цилиндра с «эластичной линейкой» и приемы этих построений.

Вопросы для повторения

Сформулируйте общие аксиомы конструктивной геометрии.

Назовите основные геометрические построения, которые можно выполнить при наличии одного из следующих инструментов: линейки, циркуля, двусторонией линейки, прямого угла.

Что называется решением геометрической задачи на построение?

Что значит «решить геометрическую задачу на построение»?

В чем сущность решения геометрических задач на построение по методу пересечения фигур?

Как построить радикальную ось двух окружностей, если эти окружности: 1) пересекаются; 2) касаются одна другой; 3) не имеют общих точек, но обладают общей касательной?

В каких ситуациях для решения задач на построение целесообразно воспользоваться геометрическими преобразованиями?

Как ставится задача о построении отрезка, заданного формулой?

Приведите несколько примеров однородных функций первого измерения.

По какому плану строятся выражения вида $x = \dfrac{a_1 \cdot a_2 \dots a_k}{b_1 \cdot b_2 \dots b_{k-1}}$?

По какому плану решается задача о построении выражения $x = \dfrac{P_{n+1}(a_1, \dots, a_n)}{P_n(b_1, \dots, b_n)}$, где P_{n+1} и P_n — однородные многочлены (с рациональными коэффициентами) от данных отрезков измерений соответственно $n+1$ и n?

Как строится циркулем и линейкой выражение вида $x = \sqrt{R_2(a_1, \dots, a_n)}$, где R_2 — рациональная однородная функция второго измерения?

Сформулируйте признак возможности построения циркулем и линейкой отрезка, заданного формулой. Разъясните, что означает необходимость и достаточиость этого признака.

В чем сущиость алгебраического метода решения геометрических задач на построение?

Сформулируйте несколько задач на построение, не имеющих решения.

Перечислите известные вам задачи на построение, не разрешимые посредством циркуля и линейки.

Как читается теорема Гаусса о делении окружности?

Можно ли посредством циркуля и линейки разделить окружность на 11, 12, 25, 100 равных частей?

Как читается теорема Мора — Маскерони?

Какова общая идея доказательства теорем типа теоремы Мора — Маскерони или теоремы Штейнера?

Приведите примеры инструментов, которые могут полностью заменить циркуль и линейку при построении фигур, состоящих из конечного числа точек.

Когда точка называется недоступной и чем она определяется?

В чем состоит общий метод решения задач на построение с недоступными точками?

Какие общие аксиомы лежат в основе теории геометрических построений в пространстве?

Какие инструменты представляют себе, когда говорят о геометрических построениях в пространстве?

Какие основные методы можно применять для решения геометрических задач на построение в пространстве?

Задачи

К § 54—56

1. Постройте треугольник по двум сторонам и углу против одной из них.

2. Постройте общую касательную к двум окружностям.

3. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

4. Постройте треугольник по углу и двум высотам, опущенным на стороны этого угла.

5. Через данную точку проведите прямую так, чтобы две данные равные окружности отсекали от нее равные отрезки.

6. Постройте ромб по стороне и сумме диагоналей.

7. Постройте треугольник по высоте, периметру и углу при основании.

8. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и сумме (или разности) основания и высоты.

9. Проведите в данном треугольнике прямую, параллельную основанию, так, чтобы отрезок этой прямой, заключенной между боковыми сторонами треугольника, был равен сумме отсекаемых прямой отрезков боковых сторон, считая от основания.

10. Дана окружность и на ней три точки, в которых пересекаются с окружностью при продолжении высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины вписанного треугольника. Постройте этот треугольник.

11. Постройте параллелограмм, зная середины трех его сторон.

12. Постройте треугольник по двум его высотам и медиане, проведенной из той же вершины, что и одна из высот.

13. Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной его вершины.

14. Постройте квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых

К § 57

15. Постройте окружность, касательную к двум данным параллельным прямым и проходящую через данную точку.

16. Постройте треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

17. Постройте окружность, которая касалась бы данной окружности в данной точке и данной прямой.

18. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и отсекающую от данной прямой хорду данной длины.

19. Постройте окружность данного радиуса, отсекающую от трех данных попарно пересекающихся прямых равные хорды.

20. Внутри данного треугольника постройте точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами.

21. Наблюдатель, имеющий в своем распоряжении карту того участка местности, на котором он находится, видит три предмета, отмеченных на карте. Кроме того, он имеет возможность измерять углы между направлениями, по которым он видит эти предметы. Требуется указать на карте пункт, где находится наблюдатель (задача Потено).

22. Постройте ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

23. Через две данные точки проведите окружность, делящую данную окружность пополам.

24. Постройте параллелограмм по основанию, высоте и отношению диагоналей.

25. На данной окружности найдите такую точку, чтобы касательная из нее к другой данной окружности была равна расстоянию искомой точки от некоторой данной точки.

26. Постройте треугольник по основанию, углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

27. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

К § 58

28. Постройте трапецию по стороне, диагоналям и углу между диагоналями.

29. Постройте треугольник по трем его медианам.

30. Даны точки A и B по разные стороны от данной прямой c. Отложите на прямой c отрезок PQ, равный данному отрезку AB, так, чтобы длина ломаной $APQB$ была наименьшей.

31. Через данную точку проведите прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, был равен данному отрезку.

32. Постройте параллелограмм, основанием которого служит данный отрезок, а две другие его вершины лежат на двух данных окружностях.

33. Постройте четырехугольник по трем сторонам и двум углам, прилежащим к неизвестной стороне.

34. Постройте четырехугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными его сторонами.

35. Между пунктами A и B расположены два канала. Где выбрать места для мостов через эти каналы, чтобы путь из A в B через эти мосты был кратчайшим? (Предполагается, что берега каждого канала — параллельные прямые и что мосты должны быть перпендикулярны берегам.)

36. Поверните вокруг данной точки M на данный угол α в указанном направлении: 1) данную окружность; б) данный квадрат.

37. Постройте равносторонний треугольник, имеющий одной своей вершиной данную точку A, а две другие вершины — на данных параллельных прямых.

38. Через данную точку P проведите прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя данными окружностями, делился этой точкой пополам.

39. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник.

40. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

41. Найдите на двух данных прямых a и b две точки, симметричные относительно третьей данной прямой c.

42. Даны две окружности. Найдите на данной прямой AB такую точку X, чтобы касательные, проведенные из этой точки к данным окружностям, были наклонены к AB под равными углами.

43. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем его сторонам, если известно, что его диагональ AC делит угол A пополам.

44. Даны $\triangle ABC$ и точка M внутри него. Постройте равнобедренный треугольник с вершиной в точке M так, чтобы его основание было параллельно стороне AB и концы основания находились на прямых AC и BC.

45. Даны прямая a и две точки A и B по разные стороны от нее. Найдите на данной прямой a такую точку C, чтобы разность ее расстояний от двух данных точек A и B была наибольшей.

46. Постройте ромб так, чтобы одна его диагональ была равна данному отрезку a и лежала на данной прямой и чтобы другие две вершины ромба лежали соответственно на двух данных окружностях.

47. Даны две окружности и прямая между ними. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины были на окружностях, а одна из высот лежала на данной прямой.

48. Даны точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой a. Расположите на этой прямой отрезок XY, равный данному отрезку l, так, чтобы ломаная $AXYB$ была наименьшей длины.

49. На прямоугольном бильярдном столе в точках A и B находились два шара. После удара в шар A он, отразившись от n последовательных бортов, попал в шар B. Постройте ломаную, которую при этом описал шар A. Решить задачу при $n = 1, 2, 3, 4$.

50. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое больше второго, а гипотенуза равна данному отрезку c.

51. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое больше второго, а высота, опущенная на гипотенузу, равна данному отрезку h.

52. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет вдвое больше второго, а сумма катетов и высоты, опущенной на гипотенузу, равна данному отрезку.

53. Постройте треугольник по двум углам, прилежащим к основанию, и периметру.

54. Постройте треугольник по углу при вершине, отношению $\frac{m}{n}$ $(m > n)$ боковых сторон и медиане, проведенной к большей из боковых сторон.

55. Постройте треугольник по углам α и β, прилежащим к основанию ($\alpha < 45°$, $\beta < 45°$), и разности между основанием и высотой, опущенной на основание.

56. Постройте треугольник, зная углы при основании и разность квадратов основания и соответствующей высоты, равную p^2 (где p — данный отрезок).

57. В данный треугольник ABC впишите ромб с данным острым углом α так, чтобы одна из его сторон лежала на отрезке AB, а две его вершины — на боковых сторонах треугольника. (Неполное решение этой задачи имеется в учебнике геометрии А. П. Киселева (ч. I, § 181, задача 3). Дайте полное решение этой задачи и сравните его с тем решением, которое приводит А. П. Киселев.)

58. В данный треугольник впишите параллелограмм, подобный данному.

59. Дайте полное решение задачи 2 из § 181 учебника А. П. Киселева и сравните его с тем решением, которое приводится в учебнике.

60. Впишите в данную окружность треугольник, у которого даны основание и отношение боковых сторон (решить задачу методом подобия и методом геометрических мест).

61. Впишите квадрат в данный круговой сегмент.

62. Дан прямой угол и внутри него точка M. Постройте прямоугольный треугольник, катеты которого находились бы на сторонах этого угла, а гипотенуза, проходя через точку M, делилась бы ею в данном отношении $m : n$.

63. Через две данные точки M и N внутри данного угла AOB проведите пару параллельных прямых так, чтобы их отрезки, заключенные между сторонами данного угла, относились, как $3:1$.

64. Дан острый угол AOB и внутри него точка C. Найдите на стороне OB точку M, равноудаленную от стороны OA и от точки C.

65. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

66. Через данную точку проведите окружность, ортогональную к двум данным окружностям.

67. Через данную точку проведите окружность, пересекающую две данные прямые под данными углами.

К § 59

68. Будут ли однородными, а если будут, то какого измерения, следующие функции:

$$1)\ ab^2-\frac{c^5}{a};\quad 2)\ \frac{a-b}{a+b};\quad 3)\ a^2b-cd;\quad 4)\ \frac{a}{a^2+b^2}?$$

69. Дан единичный отрезок. Постройте отрезок, длина которого была бы равна $2-\sqrt{2}$; $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

70. Постройте отрезки по формулам:

$$x=\frac{a^3+b^3}{a^2};\quad x=\frac{a^3+b^3}{ab+ac};\quad x=\sqrt[4]{a^3b-b^3a}.$$

71. Как построить следующие выражения:

$$x=\frac{a^7+b^7}{(ab+cd)(b^4+c^4)};\quad x=\sqrt{a^2-\frac{b^5}{a^3}};\quad x=\sqrt[4]{abcd};$$

$$x=\sqrt{\frac{a^5-b^5+c^5}{a+b+c}};$$

$$x=\frac{\sqrt{a^5-b^5}}{\sqrt{a^3+b^3}+\sqrt{a^3-b^3}}?$$

72. Как построить отрезок, длина которого равна $\sqrt[8]{3{,}4^8+2{,}3^8}$, не производя фактически указанных действий над данными числами? Единичный отрезок считается данным.

73. Постройте несколько точек, принадлежащих графикам следующих функций, не производя никаких вычислений:

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad 2)\ y=x^2;\quad 3)\ y=x^3.$$

К § 60

74. Постройте квадрат, площадь которого была бы вдвое больше площади данного квадрата («задача об удвоении квадрата»).

75. Постройте квадрат, площадь которого была бы равна сумме площадей двух данных прямоугольников.

76. В данный круг впишите прямоугольник, равновеликий данному квадрату.

77. Через данную внешнюю точку проведите секущую к данной окружности так, чтобы ее внешняя часть была втрое больше внутренней.

78. Постройте окружность, ограничивающую круг с площадью, равной площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями.

79. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

80. Данный отрезок разделите в среднем и крайнем отношении.

81. В данную окружность впишите правильный десятиугольник.

82. В данную окружность впишите треугольник, если даны точки пересечения его биссектрис с окружностью.

83. Постройте треугольник по трем высотам.

К § 64

84. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пользуясь только циркулем, постройте точку D так, чтобы точки A, B, C и D были вершинами параллелограмма.

85. Удвойте данный отрезок, пользуясь только циркулем.

86. Постройте одну треть данного отрезка, пользуясь только циркулем.

87. Даны три точки A, B и C. Пользуясь только циркулем, установите, лежат ли эти точки на одной прямой.

88. Даны точки A, B, C и D. Пользуясь только циркулем, постройте точки M и N так, чтобы $MN=AB+CD$.

89. A и C — две противоположные вершины квадрата. Постройте две другие его вершины, пользуясь только циркулем.

К § 65

90. Даны две параллельные прямые и произвольная точка вне этих прямых. Проведите через эту точку прямую, параллельную данным прямым, пользуясь только линейкой.

91. В круге проведены диаметр и две параллельные между собой хорды. Постройте центр круга, пользуясь только линейкой.

92. Пользуясь только линейкой, проведите биссектрису данного угла, если начерчена вспомогательная окружность и отмечен ее центр.

К § 66

93. Из данной точки опустите перпендикуляр на данную прямую, пользуясь циркулем и линейкой ограниченных размеров.

94. Постройте треугольник по трем заданным его сторонам, предполагая, что наибольший размах циркуля меньше наибольшей стороны, но больше ее половины.

95. По гипотенузе и катету постройте с помощью циркуля и линейки прямоугольный треугольник, предполагая, что наибольший размах циркуля меньше данного катета.

96. На данной прямой найдите точки, отстоящие от данной точки на данное расстояние d, предполагая, что наибольший размах циркуля меньше d.

97. Пользуясь только линейкой с параллельными краями, восставьте перпендикуляр к данной прямой в данной ее точке.

98. Удвойте данный отрезок, пользуясь только двусторонней линейкой.

99. Пользуясь только прямым углом, разделите данный угол пополам.

100. Заданы три точки окружности. Постройте с помощью циркуля и линейки еще какую-либо точку этой окружности, не проводя окружности.

101. Даны две точки A и B. Пользуясь только циркулем постоянного размаха AB, постройте точку C так, чтобы $\angle ACB=90°$.

102. Соедините прямой две данные точки A и B, пользуясь только данной пластинкой квадратной формы и предполагая, что отрезок AB больше стороны этой пластинки.

103. Вы располагаете пластинкой, имеющей форму правильного треугольника. Пользуясь только этой пластинкой (и карандашом), 1) проведите через данную точку параллель к данной прямой; 2) постройте середину данного отрезка; 3) проведите через даниую точку перпендикуляр к данной прямой.

К § 67

104. Разделите пополам угол между двумя данными лучами, считая вершину угла недоступной.

105. Постройте медианы треугольника, считая его вершины недоступными.

106. Постройте высоты треугольника, считая его вершины недоступными.

107. Проведите касательную к окружности в данной на ней точке, не пользуясь центром окружности.

К § 68

108. Постройте в пространстве точку, лежащую на данной прямой a и равноудаленную от двух данных точек A и B.

109. Постройте плоскость, касающуюся данного шара и параллельную данной плоскости.

110. Через данную прямую проведите плоскость, равноотстоящую от двух данных точек.

111. Постройте прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые и параллельную третьей данной прямой.

112. Постройте сферу, касающуюся данной сферы в данной на ней точке и проходящую через другую данную точку.

113. Постройте тетраэдр $SABC$, если даны его основание ABC, угол наклона грани ABS к плоскости основания и длины ребер AS и CS.

114. В данную правильную четырехугольную пирамиду впишите куб так, чтобы одно его основание лежало в плоскости основаиия пирамиды, а ребра противоположного основания — на боковых гранях пирамиды.

115. Постройте правильную треугольную призму так, чтобы одно ее боковое ребро совпадало с данной образующей данного цилиндра, а два других лежали соответственно на гранях прямого двугранного угла, ребром которого служит ось данного цилиндра.

К § 69

116. Пользуясь «сферической линейкой», постройте на сфере большую окружность, проходящую через две данные точки.

117. Пользуясь циркулем и «сферической линейкой», проведите через данную точку сферы окружность большого круга, перпендикулярную к данной окружности большого круга.

118. Пользуясь построениями на листе бумаги, найдите радиус окружности, проходящий через три точки, заданные на сфере.

119. Пользуясь построениями на листе бумаги, разделите окружность, данную на сфере, на шесть равных частей посредством циркуля.

120. Пользуясь «эластичной линейкой», удвойте угол, данный на поверхности цилиндра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая изучение данного курса, естественно попытаться отдать себе отчет в объеме и характере изложенных в нем сведений, представить себе, как и чем этот курс может помочь учителю математики в его практической работе в школе, уяснить, как связаны изученные вопросы с другими математическими дисциплинами.

Изучение первых глав этой книги несколько расширяет сравнительно со школьным курсом геометрии запас знаний нашего читателя о геометрических фигурах. Здесь же даются более отчетливые представления о таких важнейших общих понятиях геометрии, как «тело», «поверхность», «линия». Делается это, все же в весьма ограниченных рамках. Дальнейшее обогащение сведениями о геометрических фигурах студент получает в ходе изучения других математических курсов: аналитической геометрии, математического анализа.

Курс элементарной геометрии несет на себе следы многовекового эмпирического развития этой науки. В нем переплетаются логический подход и наглядность. В школьных условиях роль логического подхода возрастает от класса к классу. В ходе изучения элементарной геометрии в педагогическом институте студент изучает вопросы, непосредственно примыкающие к школьному курсу геометрии, на более высоком логическом уровне. Этим самым студент готовится к изучению «оснований геометрии», где в последовательной форме рассматриваются вопросы аксиоматического обоснования элементарной геометрии.

Вопросы измерения геометрических величин развиваются в курсе элементарной геометрии почти исключительно для прямолинейных отрезков, многоугольников и многогранников. Из других фигур рассматриваются лишь отдельные представители: окружность, круг, сфера, шар, круговой цилиндр, круговой конус и некоторые другие. Такая ограниченность круга рассматриваемых здесь фигур объясняется тем, что вычисление длин, площадей или объемов других фигур без привлечения приемов математического анализа слишком затруднительно. Изучив интегральное исчисление, студент получит значительно большие возможности для вычисления различных геометрических величин. Кроме этого, надо отметить еще, что само понятие меры геометрической фигуры уже в нашем веке было значительно обобщено. Эти обобщения освещаются теперь в педагогическом институте в дополнительных главах математического анализа.

Понятие геометрического преобразования, которому была посвящена глава 4, является одним из фундаментальных понятий современной геометрии.

В прошлом веке сложился взгляд на геометрию как на учение о преобразованиях и о свойствах фигур, сохраняющихся при тех или иных геометрических преобразованиях. Эта точка зрения получила в свое время отчетливое выражение в работах Ф. Клейна (1849—1925) и А. Кэли (1821—1895), которым удалось построить систему современной геометрии на основе теоретико-групповой классификации геометрических преобразований. В этой системе оказывается возможным указать место элементарной геометрии.

Нетрудно проследить, что, помимо инверсии (изучение которой в курсе элементарной геометрии носит эпизодический характер), мы рассматривали, по существу, только преобразования подобия. Таким образом, элементарную геометрию можно понимать как геометрию группы преобразований подобия, то есть как учение о свойствах фигур, сохраняющихся при таких преобразованиях.

Еще с XVI века появились и стали быстро развиваться геометрические исследования о преобразованиях более общего характера, получивших впоследствии наименование аффинных и проективных преобразований. Студент педагогического института подробно знакомится с этими преобразованиями при изучении курса высшей геометрии. В этом же курсе даются некоторые сведения о преобразованиях еще более общего характера — о топологических преобразованиях (о которых упоминалось вкратце в конце главы IV).

Геометрические построения в настоящее время не связаны непосредственно с наиболее актуальными проблемами математики. Но в процессе их изучения усваиваются понятия и приобретаются некоторые навыки, имеющие значение и за пределами этого вопроса. Одним из широко распространенных в современной математике понятий является понятие алгоритма. Изучение геометрических построений является хорошим средством подготовки к усвоению этого понятия. Действительно, цель решения каждой геометрической задачи на построение как раз и состоит в получении некоторого алгоритма. Разрешимость геометрической задачи на построение понимается именно как алгоритмическая разрешимость. Весьма поучительно рассмотрение задач, связанных с доказательством невозможности выполнения какого-либо построения данными средствами, так как вопросы разрешимости той или иной задачи при тех или иных допущениях встречаются в самых различных разделах математики. Геометрические построения играют так же особую роль, как средство доказательства существования геометрической фигуры, обладающей указанными свойствами. Геометрические построения составляют также теоретическую основу практической графики.

В итоге изучения геометрии в педагогическом институте студент приобретает познания, достаточные для того, чтобы осмыслить школьный курс геометрии в более глубоком аспекте и в более широком плане, чем это делается в школе. Курс методики преподавания математики должен помочь ему найти пути и способы использования полученных знаний в практике его будущей работы учителем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I и ч. II, М., Учпедгиз, 1948, 1951.
2. А. Адлер, Теория геометрических построений, М., Учпедгиз, 1940.
3. И. И. Александров, Сборник геометрических задач на построение, М., Учпедгиз, 1950.
4. Б. И. Аргунов, М. Б. Балк, Геометрические построения на плоскости, изд. 2, М., Учпедгиз, 1957.
5. Л. С. Атанасян, Г. Б. Гуревич и др., Сборник задач по элементарной геометрии, М., Учпедгиз, 1958.
6. В. Г. Ашкинузе, О числе полуправильных многогранников. Сборник «Математическое просвещение», вып. I, стр. 107—118, 1957.
7. М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, М., Физматгиз, 1959.
8. С. А. Богомолов, Геометрия (систематический курс), М., Учпедгиз, 1949.
9. В. Г. Болтянский, Равновеликие и равносоставленные фигуры, М., ГИТТЛ, 1956...
10. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Геометрия. Учебное пособие для 9-го класса средней школы, М., Учпедгиз, 1963.
11. Д. Гильберт, Основания геометрии, М., Гостехиздат, 1948.
12. Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, ч. I (планиметрия) и ч. II (стереометрия). М., Учпедгиз, 1954.
13. Л. И. Головина и И. М. Яглом, Индукция в геометрии, М., ГИТТЛ, 1956.
14. Б. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии, М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
15. П. Я. Дорф и А. О. Румер, Измерения на местности, М., изд-во АПН, РСФСР, 1953.
16. Г. И. Дринфельд, Трансцендентность чисел e и π, Харьков, 1952.
17. Я. С. Дубнов, Измерение отрезков, М., Физматгиз, 1962.
18. Евклид, Начала, М., Гостехиздат, 1948.
19. С. И. Зетель, Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1962.
20. А. П. Киселев, Геометрия, ч. I и ч. II, М., Учпедгиз, 1957.
21. А. Н. Костовский, Геометрические построении одним циркулем, М., Физматгиз.
22. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, М., ОГИЗ, 1946.
23. Б. В. Кутузов, Геометрия. Пособие для учительских и педагогических институтов, М., Учпедгиз, 1950.
24. Е. М. Ландис, О длине кривой. Сборник «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 33—34, 1957.
25. А. Лебег, Об измерении величин, М., Учпедгиз, 1960.
26. А. М. Лопшиц, Вычисление площадей ориентированных фигур, М., ГИТТЛ, 1956.
27. Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, М., ГИТТЛ, 1956.

28. П. С. Моденов, Аналитическая геометрия, М., изд-во МГУ, 1955.
29. П. С. Моденов и А. С. Пархоменко, Геометрические преобразования, М., изд-во МГУ, 1961.
30. Н. В. Наумович, Геометрические места в пространстве и задачи на построение, М., Учпедгиз, 1956.
31. Н. Н. Никитин, Геометрия. Учебник для 6—8-х классов семилетней и средней школы, М., Учпедгиз, 1957.
32. П. С. Орехов, Правильные многогранники в ортогональной проекции. «Математика в школе», 1963, № 1.
33. А. С. Пархоменко, Что такое линия, М., ГИТТЛ, 1954.
34. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I и ч. II. М., ГИТТЛ, 1948, 1949.
35. А. Н. Перепелкина и С. И. Новоселов, Геометрия и тригонометрия, М., Учпедгиз, 1947.
36. Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1962.
37. В. Л. Рабинович, Некоторые методические проблемы преподавания элементарной геометрии, диссертация, 1965.
38. З. А. Скопец, В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия), М., Учпедгиз, 1962.
39. А. С. Смогоржевский, Линейка в геометрических построениях, М., Физматгиз, 19...
40. Н. Ф. Четверухин, Изображение фигур в курсе геометрии, М., Учпедгиз, 1958.
41. Н. Ф. Четверухин, Методы геометрических построений, М., Учпедгиз, 1952.
42. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, геометрия (планиметрия) и ч. 3, геометрия (стереометрия), М., ГИТТЛ, 1952.
43. А. Г. Школьник, Задача деления круга, М., Учпедгиз, 1948.
44. Н. Н. Шоластер, Элементарная геометрия. Краткий курс для студентов-заочников пединститутов, М., Учпедгиз, 1959.
45. Л. Я. Шрубко, Трисекция угла, «Известия АН Каз. ССР», 115, вып. 12, 1952.
46. «Энциклопедия элементарной математики», книга IV (Геометрия), М., Физматгиз, 1963.
47. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, ч. 1 и ч. 2, М., ГИТТЛ, 1955 и 1956.
48. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М., Гостехиздат, 1951.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III. Геометрические величины

Глава IV. Геометрические преобразования

Глава V. Геометрические построения

Борис Иванович Аргунов
Марк Беневич Балк
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *Н. И. Никитина*
Художник *Б. Д. Константинов*
Художественный редактор *А. В. Сафонов*
Технический редактор *И. В. Квасницкая*
Корректоры *М. В. Голубева и В. Г. Соловьева*

Сдано в набор 12/II 1966 г. Подписано к печати 13/VIII 1966 г. $60\times90^{1}/_{16}$. Печ. л. 23,0. Уч.-изд. л. 21,45. Тираж 100000 экз.
(Тем. пл. 1966 г. № 22). А 13927. Заказ № 142.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Типография изд-ва «Уральский рабочий», г. Свердловск, проспект Ленина, 49.

Цена без переплета 60 к., переплет 20 к.